5 ベクトル場・スカラー場 (その３)

スカラー場の方向微分. f を (x,y)-平面上のあるスカラー場, $\boldsymbol{u} = (\lambda, \mu)$ をある単位ベクトルとする. また, 平面内のある一点 $P = (a,b)$ をとり, P から $\boldsymbol{u}$ 方向に s だけ進んだ点を $P_s = (a + s\lambda, b + s\mu)$ と書くことにする. このとき, f の P における $\boldsymbol{u}$ 方向の**方向微分** $D_{\boldsymbol{u}} f(P)$ を,

$$D_{\boldsymbol{u}} f(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(P_s) - f(P)}{s}$$

により定義する. これは P における f の「$\boldsymbol{u}$ 方向の」変化の度合いを表している. ここで, P を通り $\boldsymbol{u}$ に平行な直線を s の関数として $\boldsymbol{r}(s) = (a + s\lambda, b + s\mu)$ と表せば,

$$D_{\boldsymbol{u}} f(P) = \frac{d(f \circ \boldsymbol{r})}{ds}(0) = f_x(a,b)\lambda + f_y(a,b)\mu$$

を得る. つまり $D_{\boldsymbol{u}} f$ は $\boldsymbol{u}$ と $\operatorname{grad} f$ との内積である[1]:

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} f.$$

ここで, $D_{\boldsymbol{u}} f(P) = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} f(P)$ は $\operatorname{grad} f(P)$ の $\boldsymbol{u}$ 方向成分を表すので, $\boldsymbol{u}$ が $\operatorname{grad} f(P)$ と同じ方向のときに最大になり, $\boldsymbol{u}$ が $\operatorname{grad} f(P)$ と逆向きのときに最小になる. というわけで教科書に書いてあるように, $f(x,y)$ は $\operatorname{grad} f$ の方向に最も急激に増え, $-\operatorname{grad} f$ の方向に最も急激に減るということが分かる. 例えば, f を地図上の標高を表す関数とすると, 地点 P に立って周囲を見渡した時に最も急な上り坂になっている方向が $\operatorname{grad} f(P)$ であり, 最も急な下り坂になっている方向が $-\operatorname{grad} f(P)$ であるということになる.

なお, 平面上のスカラー場だけでなく, 一般に $\mathbb{R}^n$ 上のスカラー場で考えても同様のことがいえる.

勾配とラプラシアン. (x,y,z)-空間での勾配を考えるときに, 形式的に

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

という演算子を考えて $\operatorname{grad} f$ を ∇f と表すことがある. また

$$\nabla^2 \ (= \nabla \cdot \nabla) \ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[1] 教科書の記述に合わせて, ここでは内積をカッコ (,) ではなく中点 · で表すことにします.

を考えてこれを Δ と書き, **ラプラシアン**と呼ぶ. すなわち

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

である. この演算子および**ラプラス方程式**と呼ばれる微分方程式 $\Delta f = 0$ は物理学で重要な役割を果たす.

演習 5.1 (x, y, z)-空間内の原点に質量 M の質点 O が固定されており, また, 質量 m の別の質点 P が空間内を動き回っているとする. ニュートンの重力理論によれば, このとき O と P の間に万有引力が作用する. P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, OP 間の距離を r, 万有引力定数を G とし, $c = GMm$ とすると, P から O に向かう方向に働く引力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{c}{r^3}\boldsymbol{r}$$

となる. $\boldsymbol{F}$ は P の関数なので, ベクトル場と考えることができる (いわゆる重力場).

(1) r を P の関数と考えて, スカラー場 f を $f(P) = c/r$ により定義する. このとき $\boldsymbol{F}$ は f の勾配である ($\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$) ことを示せ. (このような f を $\boldsymbol{F}$ の**スカラーポテンシャル**という.)

(2) (1) の f はラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすことを示せ.

ベクトル場の発散と回転. $\mathbb{R}^n$ のある領域で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{v} = (v_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_n))$$

に対し, $\boldsymbol{v}$ の**発散** $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ を

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

により定義する.

以下 $n = 3$ とする. このとき $\boldsymbol{v}$ の**回転** $\operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ を

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

により定義する. $\operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ を $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ と書くこともある. $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ と $\operatorname{curl} \boldsymbol{v}$ は形式的には,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3,$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

と書ける.

演習 5.2 3 次元空間内の領域で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とスカラー場 f に対し，次の関係式が成り立つことを確認せよ．

(1) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f$,

(2) $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$,

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$,

(4) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{v}) = f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, f$,

(5) $\mathrm{curl}(f\boldsymbol{v}) = f\, \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v} + \mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{v}$,

(6) $\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}$.

[追記] 出てくる関数はすべて C^2 級と仮定する．