4 ベクトル場・スカラー場 (その 2) 改訂版

曲線とその接ベクトル. $\mathbb{R}$ の区間 I から $\mathbb{R}^2$ への連続関数 $\boldsymbol{r}: I \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 内の曲線という (同様に, I から $\mathbb{R}^3$ への連続関数を $\mathbb{R}^3$ 内の曲線という). 以下 $\boldsymbol{r}$ は微分可能と仮定する. このとき

$$\boldsymbol{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t))$$

を点 t における $\boldsymbol{r}$ の**接ベクトル**という. 関数 x, y を使って $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ と表わされるとき, $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ である.

演習 4.1 次の式が成り立つ曲線 $\boldsymbol{r}$ はどのような曲線か考察せよ. ((1) は平面内, (2) は空間内の曲線として考えてください.)
(1) $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0$.
(2) $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$.

スカラー場の等高線と勾配. (x, y)-平面上のあるスカラー場 f の等高線 $f(x, y) = k$ が曲線をなしていると仮定し, その曲線を $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ で表す. このとき, $f(x(t), y(t)) - k = 0$ が成り立つので, この式の両辺を t で微分すれば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) = 0$$

を得る. これは f の等高線の勾配と接ベクトルの内積が常に 0 になることを意味するので, 勾配 $\operatorname{grad} f$ は等高線の法ベクトルを表しているということが分かる.

勾配が 0 になる場合. さて, 教科書では, 勾配が 0 でないような点の周りにおいて等高線が実際に曲線をなしているということが説明されているが, では, 勾配が 0 になる場合には何が起こっているだろうか？

演習 4.2 (領域全体で 0 という場合) 領域内で常に $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{0}$ となるようなスカラー場はどのような関数なのかを考察せよ.

演習 4.3 (局所的に 0 になる場合) (x, y)-平面上のスカラー場 f について, もし点 (a, b) において $\operatorname{grad} f(a, b) \neq \boldsymbol{0}$ であれば, f の等高線の (a, b) における接線の方程式は

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

と表わされる. ここで, もし $\operatorname{grad} f(a, b) = \boldsymbol{0}$ ならば, 点 (a, b) においてグラフが尖っていたり交差していたりして「接線が引けない」状態になっていると考えられる. そ

のような点 (a,b) は**特異点**と呼ばれる．以下で与えられるスカラー場 f について, いくつか等高線を書いてみて, 特異点があればその様子を観察せよ.

(1) $f(x,y)=y^2-x^3-x$

(2) $f(x,y)=y^2-x^3$

(3) $f(x,y)=y^2-x^3-x^2$