3 ベクトル場・スカラー場 (その１)

ベクトル場. $\mathbb{R}^n$ 内のある領域の各点 $P = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し何かベクトル $(v_1(P), \ldots, v_n(P))$ を対応させるとき, その対応は**ベクトル場**と呼ばれる. 例えば, 回転体や流体の各点に対しその速度を対応させる速度場や, 電場・磁場や重力場などの力場はベクトル場として表わされる. $n = 2$ や $n = 3$ のときにベクトル場を図示するときは, 各点 P に対応するベクトル $(v_1(P), \ldots, v_n(P))$ を P を起点とする矢印として描く.

スカラー場とその勾配. $\mathbb{R}^n$ 内のある領域の各点 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対し何か実数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ を対応させるとき, その対応は n 変数関数と呼ばれるが, これを**スカラー場**ということもある (例えば温度分布や, 標高分布, 気圧の分布など). 定数 k に対して $f(x_1, \ldots, x_n) = k$ を満たす点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の集合を等高線 ($n = 2$ のとき) とか等位面 ($n = 3$ のとき) と言ったりする.

考えている領域でスカラー場 f が微分可能ならば, f の偏微分を成分とするベクトル場 $\operatorname{grad} f$ が

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

により与えられる. これは f の**勾配**と呼ばれる.

演習 3.1 次で与えられる (x, y)-平面上のスカラー場の等高線をいくつか描け. また, 等高線上の点を適当にとって, $\operatorname{grad} f$ も一緒に図示せよ.

(1) $f(x, y) = x + y$
(2) $f(x, y) = xy$
(3) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(4) $f(x, y) = x^2 - y^2$