2 グリーンの定理

R を (x,y)-平面上の有界閉領域とし, γ を R の境界をなす曲線とする. ただし, γ は有限個の点を除いて滑らかであると仮定する. また, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ を R を含む領域で定義された連続関数とし, 偏微分 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が存在して連続であるとする. このとき, 微分形式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ の γ に沿った線積分 (R を左回りにまわる方向でとったもの) は次のような R 上の 2 重積分と一致する:

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_R\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$$

というのがグリーンの定理の主張であった.

演習 2.1 次で与えられる領域 R とその境界 γ, および関数 P,Q について, (R を左回りにまわる方向でとった) 線積分 $\displaystyle\int_\gamma Pdx+Qdy$ を求めよ.

(1) R は点 $(0,0),(2,0),(2,3),(0,3)$ を頂点とする長方形領域, $P(x,y)=x^2e^y$, $Q(x,y)=y^2e^x$.

(2) R は点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ を頂点とする長方形領域, $P(x,y)=3y^2$, $Q(x,y)=x-y^4$.

(3) R は円 $x^2+y^2=1$ で囲まれた領域, $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x$.

(4) R は楕円 $25x^2+9y^2=225$ で囲まれた領域, $P(x,y)=\cos x\cos y$, $Q(x,y)=-\sin x\sin y$.

上記で $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$ とすると,

$$\int_R\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy=2\int_R dxdy$$

となるが, この右辺は R の面積の 2 倍に他ならない. よって, グリーンの定理により

$$(R\ \text{の面積})=\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx+xdy$$

を得る.

演習 2.2 次で与えられる領域の面積を求めよ.

(1) カーディオイド

$$\gamma : x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = 1 + \cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

で囲まれた心臓形の領域. (教科書の 186〜187 ページを参照.)

(2) x 軸とサイクロイドの一つの孤

$$C : x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta,\ \ 2\pi \ge \theta \ge 0$$

とで囲まれた領域.