1 ベクトル積 (外積)

ここでは空間ベクトル (実数成分の 3 項横ベクトル) 全体を $\mathbb{R}^3$ と書くことにする. また, 基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{j} = (0,1,0), \quad \boldsymbol{k} = (0,0,1)$$

により定める.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ を 2 つの空間ベクトルとするとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のベクトル積(または外積) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

により定める. 便宜的に行列式の記号を使って

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{i} \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{j} \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{k} \end{vmatrix}$$

と覚えておくと便利である.

演習 1.1 次のことを確かめよ.

(1) $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$.

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

(4) 任意の実数 r に対し, $(r\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (r\boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

演習 1.2 逆に, 上記の (1)–(4) の性質を満たす演算 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は上で定義したベクトル積以外にはありえないことを示せ.

演習 1.3 幾何学的には, ベクトル積は次の (i)(ii) を満たすベクトルとして定まることを確かめよ.

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい. ただし, 面積が 0 の場合 ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行, または, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらかが $\boldsymbol{0}$ の場合) は, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 両方に直交し, さらに, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ がこの順序で右手系をなすような向きである.

[ヒント] (やり方１) 教科書第２章６節を参照. (やり方２) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して (i)(ii) を満たすベクトルを与える演算が (1)–(4) を満たすことを確かめる.

演習 1.4 ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書くことにする.

(1) 次を示せ:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立であるとする. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がこの順序で右手系をなすなら $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$, 左手系をなすなら $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$ となることを示せ.

(3) 行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行六面体の体積と一致することを示せ.