

アフィン代数群と代数的行列群

天野勝利

(2012 年 6 月 8 日 ~ 9 月 7 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます。この資料は本の Ch. 4 にあたる部分の講義ノートです。

3 章までは、アフィン群スキームを表現可能な群関手として抽象的に定義して、そのまま突っ走ってきたわけですが、この章ではそれが古典的な意味での代数群とどのような関係にあるのかを調べていきます。

4.1 ザリスキー位相

k を体とする。 n 変数多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ の部分集合 E に対し、 k^n の元で E のすべての元の零点となっているもの全体の集合 (E の零点集合) を $Z(E)$ と書く:

$$Z(E) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (\forall f \in E)\}.$$

I を E で生成される $k[X_1, \dots, X_n]$ のイデアルとすれば $Z(E) = Z(I)$ となるので、イデアルの零点集合のみを考えれば十分である。

さて、 I, J および I_α たちを $k[X_1, \dots, X_n]$ のイデアルとするとき、

(i) $Z(0) = k^n, Z(1) = \emptyset,$

(ii) $Z(IJ) = Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J),$

(iii) $Z(\sum_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha Z(I_\alpha)$

が成立するので、 k^n には $\{Z(E) \mid E \subset k[X_1, \dots, X_n]\}$ を閉集合族とするある位相が入る。その位相をザリスキー位相 (Zariski topology) という。

[(ii) の証明] まず、明らかに $Z(IJ) \supset Z(I \cap J) \supset Z(I) \cup Z(J)$ である。任意の $x \in Z(IJ) \setminus Z(I)$ をとると、 $x \notin Z(I)$ よりある $f \in I$ が存在して $f(x) \neq 0$ となる。このとき任意の $g \in J$ について $fg \in IJ$ だから、 $x \in Z(IJ)$ により $f(x)g(x) = 0$ 、従って $g(x) = 0$ となる。よって $x \in Z(J)$ 。以上により $Z(IJ) \subset Z(I) \cup Z(J)$ を得る。 \square

定理 4.1 $k \subset L$ を体の拡大とする. このとき, L^n のザリスキー位相から定まる k^n の相対位相は k^n のザリスキー位相と一致する.

[証明] $k[X_1, \dots, X_n] \supset E$ の k^n における零点集合を S とし, また E の L^n における零点集合を T とすると $T \cap k^n = S$ だから, k^n のザリスキー位相による閉集合はすべて相対位相による閉集合でもある.

逆に, $L[X_1, \dots, X_n]$ のイデアル J をとり, J は $f_1, \dots, f_r \in L[X_1, \dots, X_n]$ で生成されているとする. $\{a_i\}$ を L の k -基底とすると, ある $f_{ij} \in k[X_1, \dots, X_n]$ たちがあって $f_j = \sum_i a_i f_{ij}$ ($j = 1, \dots, r$) と書ける. このとき, J の L^n における零点集合を Z とすると,

$$x \in Z \cap k^n \Leftrightarrow f_j(x) = 0 \ (\forall j) \Leftrightarrow f_{ij}(x) = 0 \ (\forall i, j)$$

だから, $Z \cap k^n$ は k^n のザリスキー位相による閉集合である. □

定義 4.2 k^n の (ザリスキー位相による) 閉集合を代数的集合 (algebraic set) と呼ぶ. 二つの代数的集合 $S \subset k^n, T \subset k^m$ について, 写像 $\varphi: S \rightarrow T$ が多項式写像 (polynomial map) であるとは, φ がある多項式 $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ によって

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)) \quad ((a_1, \dots, a_n) \in S)$$

と書ける写像であることを指す. また, S から k への多項式写像を多項式関数 (polynomial function) と呼ぶ.

以下, 代数的集合は k^n のザリスキー位相からくる相対位相により位相空間とみなす.

演習 4.3 多項式写像は連続であることを示せ.

演習 4.4 (1) 一点 $e \in k^n$ をとるとき, $\{e\}$ は代数的集合になることを示せ.

(2) k が有限体のときは k^n のザリスキー位相は離散位相になることを示せ.

Waterhouse の本では, k が有限体の場合はあまり意味がないとして Ch. 4 全体にわたり k を無限体と仮定しているが, この仮定が実際に必要になるのは一部のみのなので, 本稿では必要な部分でのみ無限体を仮定し, 他の部分では有限体の場合も含めて考えることにする.

定理 4.5 k は無限体と仮定する. このとき $0 \neq f \in k[X_1, \dots, X_n]$ に対し, ある $a \in k^n$ が存在して $f(a) \neq 0$ となる.

[証明] n に関する帰納法で示す. $n = 1$ のときは $f(X) = 0$ の解は高々有限個しかないから, 無限体の仮定より $f(a) \neq 0$ となる $a \in k$ が存在する. $n > 1$ のとき, $f = \sum f_i X_n^i$ ($f_i \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$) と書く. f_i たちのうち 0 でないものを一つとり, それについて帰納法の仮定を適用すれば, ある $a_1, \dots, a_{n-1} \in k$ が存在して $f(a_1, \dots, a_{n-1}, X_n)$ が 0 にならないようにできる. あとは $n = 1$ の場合に帰着する. \square

注意 4.6 上の定理は有限体では成立しない. 例えば k を位数 q の有限体として $n = 1$ の場合を考えてみると, $\prod_{a \in k} (X - a) = X^q - X$ であるから, 任意の $f(X) \in k[X]$ について

$$f(a) = 0 \ (\forall a \in k) \Leftrightarrow X^q - X \mid f(X)$$

である.

系 4.7 k は無限体とする. $0 \neq h \in k[X_1, \dots, X_n]$ をとり $U = \{x \in k^n \mid h(x) \neq 0\}$ とおく. このとき任意の $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ について, もし $f(x) = 0$ ($\forall x \in U$) ならば多項式として $f = 0$ である. (i.e. U は k^n の中でザリスキー位相に関して稠密である.)

[証明] もし $f(x) = 0$ ($\forall x \in U$) ならば $h(x)f(x) = 0$ ($\forall x \in k^n$) となるので定理により $hf = 0$. しかし $h \neq 0$ だから $f = 0$ を得る. \square

4.2 アフィン代数群と代数的行列群

定義 4.8 代数的集合 $S \subset k^n$ が群構造を持ち, かつ, 積 $\text{mult} : S \times S \rightarrow S$ および逆元をとる写像 $\text{inv} : S \rightarrow S$ がともに多項式写像¹であるとき, S をアフィン代数群 (affine algebraic group) と呼ぶ. (なお, $\text{unit} : \{e\} \rightarrow S$ は自動的に多項式写像となることに注意.)

演習 4.9 (1) k^3 は和 $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ に関してアフィン代数群になることを示せ.

(2) k^3 は積 $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$ に関するアフィン代数群になることを示せ.

(3) $SL_n(k)$ は k^{n^2} の閉集合とみなせる. $SL_n(k)$ およびその閉部分群 (閉集合かつ部分群) たちはアフィン代数群になることを示せ.

定義 4.10 $SL_n(k)$ の閉部分群を代数的行列群 (algebraic matrix group) と呼ぶ.

さて, 一般線形群 $GL_n(k)$ は k^{n^2} の閉集合ではないので, 上記の代数的行列群の定義にはそのままでは当てはまらない. しかし, 次の命題の意味で $GL_n(k)$ とその閉部分群たちも代数的行列群とみなすことができる.

¹ $S \times S$ は k^{2n} の代数的集合とみなしている.

命題 4.11 $\varphi : GL_n(k) \rightarrow SL_{n+1}(k)$, $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1/\det A \end{pmatrix}$ は単射群準同型で, その像は $SL_{n+1}(k)$ の閉部分群である. また, $GL_n(k)$ には k^{n^2} のザリスキー位相からくる相対位相が入り, φ の像には $SL_{n+1}(k)$ からの相対位相が入るが, それらに関して φ は同相写像である.

演習 4.12 この命題を証明せよ.

4.3 行列群とその閉包

S を代数的行列群とし, $b \in S$ を固定するとき, S から S への写像

$$x \mapsto bx, \quad x \mapsto xb, \quad x \mapsto x^{-1}$$

はそれぞれ同相写像である. また, $x \mapsto x^{-1}bx$ は連続写像となる.

定理 4.13 S を代数的行列群とする.

- (1) S の任意の部分群 M について, M の S における閉包 \bar{M} は閉部分群となる.
- (2) M, N を S の部分群, $M \triangleright N$ とするとき, $\bar{M} \triangleright \bar{N}$.
- (3) A, B, C を S の部分集合, $[A, B] \subset C$ とするとき, $[\bar{A}, \bar{B}] \subset \bar{C}$.
- (4) S の部分群 M が可換群 (またはベキ零群, または可解群) なら, \bar{M} もそう.
- (5) U を S の稠密な開集合とすると, $UU = S$.

[証明] (1) 任意の $b \in M$ に対し, $Mb = M \subset \bar{M}$ で, $x \mapsto xb$ は同相だったから, $\bar{M}b = \overline{Mb} \subset \bar{M}$ となる. よって, 任意の $y \in \bar{M}$ に対し $yM \subset \bar{M}$ だから, さらに $y\bar{M} = \overline{yM} \subset \bar{M}$ を得る. これは \bar{M} が積で閉じていることを意味している. また, $x \mapsto x^{-1}$ も同相だったので, $(\bar{M})^{-1} = \overline{(M^{-1})} = \bar{M}$. よって \bar{M} は S の部分群である.

(2) 任意の $y \in M$ に対し, $yNy^{-1} = N \subset \bar{N}$ で, また $x \mapsto yxy^{-1}$ は同相なので, $y\bar{N}y^{-1} = \overline{yNy^{-1}} = \bar{N}$ を得る. 今度は任意の $b \in \bar{N}$ を固定し, $\varphi : x \mapsto xbx^{-1}$ とおく. すると $\varphi(M) \subset \bar{N}$ および φ の連続性により $\varphi(\bar{M}) \subset \bar{N}$ であることがいえる ($M \subset \varphi^{-1}(\varphi(M)) \subset \varphi^{-1}(\bar{N})$ で $\varphi^{-1}(\bar{N})$ は閉集合だから $\bar{M} \subset \varphi^{-1}(\bar{N})$). これは \bar{N} が \bar{M} の正規部分群であることを意味する.

(3) 任意の $a \in A$ に対し, $x \mapsto xa^{-1}x^{-1} \mapsto axa^{-1}x^{-1}$ は連続写像で, 仮定より B を \bar{C} の中に写すので, \bar{B} も \bar{C} の中に写す. すなわち $[A, \bar{B}] \subset \bar{C}$ を得る. 次に任意の $b \in \bar{B}$ をとり同様に考えれば, $x \mapsto xbx^{-1} \mapsto xbx^{-1}b^{-1}$ は \bar{A} を \bar{C} の中に写すことが分かる. よって $[\bar{A}, \bar{B}] \subset \bar{C}$.

(4) (可解性, 可換性) 一般に, 群 G に対し $D^0(G) := G$, $D^i(G) := [D^{i-1}(G), D^{i-1}(G)]$ ($i > 0$) とおくと, G が可解群であるための必要十分条件は, ある m について $D^m(G) = \{e\}$ (e は単位元) となることである. 今, S の部分群 M が可解群で,

$$M = D^0(M) \supset D^1(M) = [M, M] \supset \cdots \supset D^m(M) = \{e\}$$

であったとする. (3) より, 各 $i > 0$ について帰納的に

$$\overline{D^i(M)} \supset [\overline{D^{i-1}(M)}, \overline{D^{i-1}(M)}] \supset [D^{i-1}(\bar{M}), D^{i-1}(\bar{M})] = D^i(\bar{M})$$

であることがいえる. すると $\{e\} = \overline{D^m(M)} \supset D^m(\bar{M})$ より $D^m(\bar{M}) = \{e\}$ となるから, \bar{M} が可解群であることが分かる. 特に M が可換群のときは $D^1(M) = \{e\}$ より $D^1(\bar{M}) = \{e\}$ であるから, \bar{M} も可換群.

(ベキ零性) 一般に, 群 G に対し $Z_0(G) := \{e\}$ (e は単位元), $Z_i(G) := \{z \in G \mid [G, z] \subset Z_{i-1}(G)\}$ ($i > 0$) とおくと, すべての i について $G \triangleright Z_i(G)$ で, $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ は $G/Z_{i-1}(G)$ の中心と一致する. そして, ある m について $Z_m(G) = G$ となることと G がベキ零群であることは同値となる. 今, S の部分群 M がベキ零群で,

$$Z_0(M) \subset Z_1(M) \subset \cdots \subset Z_m(M) = M$$

であったとする. (3) より, 各 i について帰納的に, $[\bar{M}, \overline{Z_i(M)}] \subset \overline{Z_{i-1}(M)} \subset Z_{i-1}(\bar{M})$ そして $\overline{Z_i(M)} \subset Z_i(\bar{M})$ であることがいえる. 従って $\bar{M} = \overline{Z_m(M)} \subset Z_m(\bar{M})$ となり, $Z_m(\bar{M}) = \bar{M}$ を得る.

(5) 任意の $x \in S$ に対し Ux^{-1} は開集合, U^{-1} は稠密開集合ゆえ, $Ux^{-1} \cap U^{-1} \neq \emptyset$. そこで, $vx^{-1} = u^{-1}$ となる $u, v \in U$ をとると, $x = uv \in UU$. 従って $UU = S$. \square

4.4 代数的集合からアフィンスキームへ

$k^n \supset S$ に対し $k[X_1, \dots, X_n]$ のイデアル $I(S)$ を

$$I(S) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(s) = 0 \ (\forall s \in S)\}$$

により定める. このとき $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ について,

$$f \equiv g \pmod{I(S)} \Leftrightarrow f(s) = g(s) \ (\forall s \in S)$$

だから, 剰余環 $k[X_1, \dots, X_n]/I(S)$ は S 上の多項式関数の環とみなすことができる. そこで以下

$$k[S] := k[X_1, \dots, X_n]/I(S)$$

と書くことにしよう. S が代数的集合のときは $k[S]$ を S の座標環と呼ぶ.

命題 4.14 T, S を k^n の部分集合とする.

(1) $T \supset S \Rightarrow I(T) \subset I(S) \Rightarrow$ ある全射環準同型 $k[T] \twoheadrightarrow k[S]$ が存在する. とくに T, S が代数的集合のときは, $T \supset S \Leftrightarrow Z(I(T)) \supset Z(I(S)) \Leftrightarrow I(T) \subset I(S)$.

(2) S の閉包 \bar{S} をとるとき, $I(S) = I(\bar{S})$, 従って $k[S] = k[\bar{S}]$.

(3) $\bar{S} = Z(I(S))$.

[証明] (1) の前半は容易に分かる. とくに $I(S) \supset I(\bar{S})$. 一方, $S \subset Z(I(S))$ で $Z(I(S))$ は閉集合だから $\bar{S} \subset Z(I(S))$ で, これにより $I(S) \subset I(\bar{S})$. よって (2) がいえた. また, $\bar{S} = Z(I)$ となるイデアル I をとると $I \subset I(S)$ となるから, $\bar{S} \supset Z(I(S))$. よって (3) を得る. (1) の後半は (3) からすぐにわかる. \square

さて, $k[S]$ が定義するアフィンスキームを \mathbf{F}_S と書くことにする:

$$\mathbf{F}_S = \mathrm{Sp} k[S] : R \mapsto \mathrm{Alg}_k(k[S], R).$$

次の命題により, \mathbf{F}_S の k -有理点全体 $\mathbf{F}_S(k)$ と \bar{S} とは同一視できる.

命題 4.15 S を k^n の部分集合とする.

- (1) $\mathrm{Alg}_k(k[X_1, \dots, X_n], k) \xrightarrow{\sim} k^n, \varphi \mapsto (\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n))$.
 (2) $\mathbf{F}_S(k) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Alg}_k(k[X_1, \dots, X_n], k) \mid I(S) \subset \mathrm{Ker} \varphi\} \xrightarrow[\text{(1)}]{\sim} Z(I(S)) = \bar{S}$.

注意 4.16 k が無限体のとき, 4.1 節の定理により $I(k^n) = 0$ だから, $k[k^n] = k[X_1, \dots, X_n]$ となり, 従って (2) で $S = k^n$ とした場合と (1) が一致する.

しかし k が有限体の場合, 命題自体は成立するものの (1) が (2) の特別な場合というわけではなくるので注意が必要である. k が位数 q の有限体のとき, $I(k^n) = (X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n) \neq 0$ だから $k[k^n] \neq k[X_1, \dots, X_n]$ となる.

代数的集合の全体は多項式写像を射として圏をなすが, この圏は $S \mapsto \mathbf{F}_S$ を通じてアフィンスキームの圏の中のある部分圏と圏同値となる:

定理 4.17 $S \mapsto \mathbf{F}_S$ は代数的集合の圏からアフィンスキームの圏への忠実充満 (fully faithful) な関手である. (つまり, $S \subset k^n, T \subset k^m$ を代数的集合とすると, S から T への多項式写像と \mathbf{F}_S から \mathbf{F}_T への関手間射とは双射的に対応する.) さらにこの関手は直積を保存する.

また, $k \subset L$ を体の拡大とすると, k^n の代数的集合の L^n における閉包をとることは, アフィンスキームにおいては基礎体の変更に相当する.

[略証] $S \subset k^n, T \subset k^m$ を代数的集合とし, $k[S] = k[X]/I(S), k[T] = k[Y]/I(T)$ (ただし, $k[X] = k[X_1, \dots, X_n], k[Y] = k[Y_1, \dots, Y_m]$) と書く.

S から T への多項式写像と \mathbf{F}_S から \mathbf{F}_T への関手間射は次のように双射的に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \{S \rightarrow T \text{ 多項式写像} \} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Alg}_k(k[T], k[S]) & \xleftarrow[\text{米田の補題}]{\sim} & \{\mathbf{F}_S \rightarrow \mathbf{F}_T \text{ 関手間射} \}. \\ [s \mapsto (f_1(s), \dots, f_m(s))] & \longleftrightarrow & [Y_j + I(T) \mapsto f_j + I(S)] & & \end{array}$$

この対応は射の合成を保存するので, $S \mapsto \mathbf{F}_S$ は忠実充満な関手となる.

$S \times T$ は k^{n+m} の代数的集合とすることができるが,

$$I(S \times T) = I(S) \otimes k[Y] + k[X] \otimes I(T) \subset k[X] \otimes_k k[Y] (= k[X, Y])$$

となり, これは自然な全射 $k[X, Y] \rightarrow k[S] \otimes_k k[T]$ の核であるので,

$$k[S \times T] \simeq k[S] \otimes_k k[T]$$

を得る. $k[S] \otimes_k k[T]$ の定義するアフィンスキームは $\mathbf{F}_S \times \mathbf{F}_T$ に他ならないから, 関手 $S \mapsto \mathbf{F}_S$ が直積を保存することが分かる.

また, L を k の拡大体とすると,

$$\{f \in L[X] \mid f(a) = 0 (\forall a \in S)\} = I(S) \otimes L \subset k[X] \otimes_k L = L[X]$$

となる. 故に $L[S] \simeq k[S] \otimes_k L$. □

命題 4.18 S をアフィン代数群, $\mathbf{G} = \mathbf{F}_S$ とする. S の積 $\text{mult} : S \times S \rightarrow S$, 逆元 $\text{inv} : S \rightarrow S$, 単位射 $\text{unit} : \{e\} \rightarrow S$ に対応する関手間射 $\text{mult} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $\text{inv} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $\text{unit} : \{1\} \rightarrow \mathbf{G}$ をとれば, これらにより \mathbf{G} はアフィン群スキームの構造をもつ. またこのとき, 命題 4.15 (2) の写像 $\mathbf{G}(k) \xrightarrow{\sim} S$ は群同型となる.

演習 4.19 $S = k^3$ とし, S を演習 4.9 (2) の意味でアフィン代数群とみなす. このとき $k[S]$ はアフィン群スキーム \mathbf{F}_S の座標環となるので, ホップ代数の構造をもつはずである. $k[S]$ のホップ代数構造を調べよ.

演習 4.20 H をアフィン代数群とすると, $k[H]$ の余単位射 ε と対合射 S はそれぞれ $\varepsilon(f) = f(e)$, $(S(f))(x) = f(x^{-1})$ ($f \in k[H]$, $x \in H$, e は H の単位元) によって与えられることを示せ.

上記の命題で, \mathbf{G} は代数的アフィン群スキームとなるので, 3.4 節の定理により, ある閉埋め込み $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}_m$ ($\exists m \in \mathbb{N}$) が存在する. よって k -有理点をとれば単射群準同型 $S \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(k) \hookrightarrow \mathbf{GL}_m(k) = GL_m(k)$ が得られるが, その像は $GL_m(k)$ の閉部分群となる. 従って, 次が成立する:

系 4.21 任意のアフィン代数群は, ある代数的行列群と同型となる.

代数的行列群はアフィン代数群の特別な場合として定義したわけであるが, 実は両者は本質的には同じ概念だったわけである.

例 4.22 k^3 を演習 4.9 (2) の意味でアフィン代数群とみたものは、次のように $SL_3(k)$ に埋め込むことができる:

$$k^3 \hookrightarrow SL_3(k), \quad (a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定義 4.23 E を体 k 上のアフィンスキームとする. ある代数的集合 $S \subset k^n$ が存在して $E \simeq F_S$ ($\Leftrightarrow k[E] \simeq k[S]$) となるとき, E は S に由来する (または S に対応する) ということにする.

4.5 代数的集合に対応するアフィンスキームの特徴づけ

前節でアフィンスキームの圏の中に代数的集合に対応する部分圏があることをみたわけだが, この節では代数的集合に対応するアフィンスキームとそうでないアフィンスキームを区別するための判定法について調べ, そして k が無限体のときには G_a, G_m, GL_n, SL_n がアフィン代数群に対応することを示す.

定理 4.24 A を可換 k -代数とするととき, 次の (i) と (ii) は同値:

(i) ある代数的集合 $S \subset k^n$ が存在して $A \simeq k[S]$,

(ii) A は k 上有限生成かつ $\bigcap_{\varphi \in \text{Alg}_k(A, k)} \text{Ker } \varphi = 0$.

なお, (i)(ii) が成り立つとき A は被約 (i.e. A には非自明なベキ零元が存在しない).

[証明] ((i) \Rightarrow (ii)) 命題 4.15 (2) の対応を考えれば, 任意の $f \in k[S]$ について,

$$f \in \text{Ker } \varphi \ (\forall \varphi \in \text{Alg}_k(k[S], k)) \Leftrightarrow f(s) = 0 \ (\forall s \in S) \Leftrightarrow f = 0.$$

((ii) \Rightarrow (i)) A は有限生成なので, 多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ とあるイデアル I によって $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$ と書いてよい. $S = Z(I) \subset k^n$ とすると, $I \subset I(S)$ なので, 自然な全射 k -代数射 $\exists \psi : A \rightarrow k[S]$ がとれる. さらに, 次の写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_k(A, k) & \xrightarrow{\text{単射}} & S & \xrightarrow{\sim} & \text{Alg}_k(k[S], k) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(X_i + I))_i & \mapsto & [X_i + I(S) \mapsto \varphi(X_i + I)] \end{array}$$

を考えると, これは $\text{Alg}_k(k[S], k) \rightarrow \text{Alg}_k(A, k)$, $s \mapsto s \circ \psi$ を逆写像とする全単射となっている. 従って,

$$\text{Ker } \psi = \bigcap_{\varphi \in \text{Alg}_k(A, k)} \text{Ker } \varphi = 0.$$

故に $A \simeq k[S]$ を得る. 最後の主張は $k[S]$ が被約であることから直ちに従う. \square

やや冗長になるが, アフィンスキームに関してこの定理 (とその証明) が意味するところをもう少し詳しくまとめ直しておこう. \mathbf{F} を有限生成 k -代数により表現されるアフィンスキームとし, その座標環を上での証明のように $k[\mathbf{F}] = k[X_1, \dots, X_n]/I$ と書く. I により定まる k^n の代数的集合 $Z(I)$ をとると, $\mathbf{F}(k) = \text{Alg}_k(k[\mathbf{F}], k) \rightarrow Z(I)$, $\varphi \mapsto (\varphi(X_i + I))_i$ は全単射となる. 以下, これにより $\mathbf{F}(k)$ と $Z(I)$ を同一視し, その座標環を $k[\mathbf{F}(k)] (= k[Z(I)])$ と書くことがある. このとき自然な k -代数射 $k[\mathbf{F}] \rightarrow k[\mathbf{F}(k)]$ があって, その核は

$$I(Z(I))/I = \bigcap_{\varphi \in \text{Alg}_k(k[\mathbf{F}], k)} \text{Ker } \varphi$$

となる. そして次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \text{ がある } k \text{ 上の代数的集合に由来する} &\Leftrightarrow \bigcap_{\varphi \in \text{Alg}_k(k[\mathbf{F}], k)} \text{Ker } \varphi = 0 \Leftrightarrow k[\mathbf{F}] \simeq k[\mathbf{F}(k)] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ は } \mathbf{F}(k) \text{ に由来する.} \end{aligned}$$

だから, おおざっぱに言えば, 「 \mathbf{F} が k 上の代数的集合に由来する (対応する)」というとき, それが意味するのは, $\mathbf{F}(k)$ には十分多くの点が含まれていてこれを零化するイデアル $I(\mathbf{F}(k))$ が小さく, $k[\mathbf{F}]$ から k への代数射が十分たくさんとれる, ということである.

命題 4.25 k は無限体とする. このとき, G_a, G_m, GL_n, SL_n はそれぞれ $G_a(k), G_m(k), GL_n(k), SL_n(k)$ に由来する.

[証明] GL_n の座標環は $k[GL_n] = k[X_{11}, \dots, X_{nn}, T]/(T \det(X_{ij}) - 1)$ と書ける. $I = (T \det(X_{ij}) - 1)$ とおくと, $I(Z(I)) = I$ を示せばよい. 任意の $f \in k[X_{11}, \dots, X_{nn}, T]$ に対し, $m = \deg_T f$ とおくと, ある $p \in k[X_{11}, \dots, X_{nn}]$ が存在して

$$(\det(X_{ij}))^m f \equiv p \pmod{I}$$

を満たす. このとき,

$$\begin{aligned} f \in I(Z(I)) &\Rightarrow f(g, \frac{1}{\det g}) = 0 \ (\forall g \in GL_n(k)) \Rightarrow p(g) = 0 \ (\forall g \in GL_n(k)) \\ &\stackrel{\text{系 4.7}}{\Rightarrow} p = 0 \Rightarrow (\det(X_{ij}))^m f \equiv 0 \pmod{I} \quad (\text{両辺に } T^m \text{ をかける}) \\ &\Rightarrow f \equiv 0 \pmod{I} \Rightarrow f \in I \end{aligned}$$

を得る. よって $I(Z(I)) = I$ がいえて GL_n が $GL_n(k)$ に由来することが分かった. なお, $G_m = GL_1$ だから, G_m についての主張もついでに証明された. また G_a については k が無限体であることにより $k[k] = k[X] = k[G_a]$ だから明らか.

さて, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し,

$$\mathrm{SL}_n(R) \times \mathrm{G}_m(R) \rightarrow \mathrm{GL}_n(R), \quad (A, r) \mapsto A \begin{pmatrix} r & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

は (群準同型ではないが) 全単射であり, これにより関手間同型

$$\mathrm{SL}_n \times \mathrm{G}_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \quad (\text{アフィンスキームとして})$$

を得る. 従ってこれに対応する k -代数同型

$$k[\mathrm{GL}_n] \simeq k[\mathrm{SL}_n] \otimes_k k[\mathrm{G}_m]$$

がある. また $R = k$ のときを考えると,

$$\mathrm{SL}_n(k) \times \mathrm{G}_m(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(k)$$

は代数的集合の同型射になるので, k -代数同型

$$k[\mathrm{GL}_n(k)] \simeq k[\mathrm{SL}_n(k)] \otimes_k k[\mathrm{G}_m(k)]$$

を得る. 一方, 前半の証明から $k[\mathrm{GL}_n] \simeq k[\mathrm{GL}_n(k)]$ だから, 結局

$$k[\mathrm{SL}_n] \otimes_k k[\mathrm{G}_m] \simeq k[\mathrm{SL}_n(k)] \otimes_k k[\mathrm{G}_m(k)]$$

である. これにより $k[\mathrm{SL}_n] \simeq k[\mathrm{SL}_n(k)]$ が従う. □

というわけで, k が無限体のときは GL_n や SL_n などがちゃんと代数的集合に対応することが分かった. 一方, 次の例のように, 代数的集合には対応しないアフィン群スキームもある:

例 4.26 (1) k が有限体の時は, k 上の代数的集合に由来するアフィン群スキームは有限なものだけなので, 上の命題で挙げた G_a , G_m , GL_n , SL_n はどれも k 上の代数的集合に対応しない.

(2) k が標数 $p > 0$ の体の時, α_p は代数的集合には由来しない. 実際 $\alpha_p(k) = \{0\} \subset k$, つまり, $\alpha_p(k)$ は自明な群になってしまう.

(3) $k = \mathbb{R}$ のとき, $\mu_3(\mathbb{R})$ も自明な群になってしまうので, μ_3 は $\mu_3(\mathbb{R})$ には対応しない.

一般に有限生成な可換 k -代数 A が与えられたとき、定理 4.24 の条件を満たすだけの十分な代数射があるかどうかを見極めるには、証明中にあるイデアル I の定める (連立) 代数方程式を満たす k -有理点が十分多く存在するかどうかを問う必要があり、判定は難しいこともある (逆にいえば、それだけ興味深い研究対象ではある)。しかし k が代数閉体の時には、代数的集合に対応するアフィンスキームの特徴づけはもっと簡明になる:

定理 4.27 k が代数閉体のとき、有限生成な可換 k -代数 A について、

$$A \text{ がある代数的集合の座標環と同型} \Leftrightarrow A \text{ は被約.}$$

[証明] ヒルベルトの零点定理 (例えば Waterhouse の本の Appendix, A.8 を参照) より、

$$\text{Alg}_k(A, k) \rightarrow \{A \supset I \text{ 極大イデアル}\}, \quad \varphi \mapsto \text{Ker } \varphi$$

は全単射で、

$$\bigcap_{\varphi \in \text{Alg}_k(A, k)} \text{Ker } \varphi = \bigcap_{\substack{A \supset I \\ \text{極大イデアル}}} I = \sqrt{0} \quad (\text{ベキ零根基}).$$

従って、 A が定理 4.24 の条件を満たすことは $\sqrt{0} = 0$ と同値となる。 \square

実は、驚くべきことに、 k の標数が 0 のときは任意の可換 k -ホップ代数が被約であることが証明できる (11.4 節)。従って、 k が標数 0 の代数閉体の時にはすべてのアフィン群スキームがなんらかのアフィン代数群に対応することになり、 k 上のアフィン代数群の圏と k 上の代数的アフィン群スキームの圏とはぴったり圏同値となる。(ただしもちろん、アフィンスキームまで話を広げると、被約でない有限生成可換 k -代数はいくらでも作れるので、代数的集合に対応しないものはたくさんある。)

演習 4.28 (1) G を体 k 上のアフィン群スキーム、 H_1, H_2 を G の閉部分群スキームとする。このとき、群関手

$$H_1 \cap H_2 : R \mapsto H_1(R) \cap H_2(R)$$

は G の閉部分群スキームとなることを示せ。

(2) k が標数 $p > 0$ の代数閉体であったとする。 $G = G_a \times G_a$ とし、 H_1, H_2 を

$$H_1(R) = \{(x, y) \in G(R) \mid y = 0\}, \quad H_2(R) = \{(x, y) \in G(R) \mid y = x^p\}$$

により定める。このとき、 G, H_1, H_2 はアフィン代数群に対応するが、 $H_1 \cap H_2$ はそうではないことを示せ。

4.6 同時対角化可能性

最後に、2.2 節の対角化可能性の定義がちゃんと行列群の同時対角化可能性の一般化になっていることを確かめる。

補題 4.29 X を群, kX を X の k 上の群環とし, これにホップ代数構造を $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ ($g \in X$) により定める. このとき任意の右 kX -余加群 (V, ρ) について, $V_g = \{v \in V \mid \rho(v) = v \otimes g\}$ ($g \in X$) とおくと, $V = \bigoplus_{g \in X} V_g$.

[証明] 任意の $v \in V$ について, $\rho(v) = \sum_{g \in X} v_g \otimes g$ となる $v_g \in V$ をとると, $v = (\text{id} \otimes \varepsilon)(\rho(v)) = \sum_{g \in X} v_g$. また, $\sum_{g \in X} \rho(v_g) \otimes g = \sum_{g \in X} v_g \otimes \Delta(g) = \sum_{g \in X} v_g \otimes g \otimes g$ だから, 各 $g \in X$ について $\rho(v_g) = v_g \otimes g$, すなわち $v_g \in V_g$ を得る. よって $V = \sum_{g \in X} V_g$. さらに, $v = 0 \Rightarrow \rho(v) = \sum_{g \in X} v_g \otimes g = 0 \Rightarrow v_g = 0$ ($\forall g \in X$) となるので, $\sum_{g \in X} V_g$ は直和であることが分かる. \square

定理 4.30 M を $GL_n(k)$ の部分群, \bar{M} をその $GL_n(k)$ における閉包とする. このとき, M が同時対角化可能 $\Leftrightarrow \bar{M}$ に対応するアフィン群スキームが対角化可能.

[証明] (\Leftarrow) G を \bar{M} に対応するアフィン群スキームとすると, 自然に閉埋め込み $G \hookrightarrow GL_n$ がとれる. もし G が対角化可能ならば, ある (有限生成) アーベル群 X があって $k[G] \simeq kX$ となる. $V = k^n$ とすると, G の V 上の線形表現 $G \hookrightarrow GL_n \xrightarrow{\sim} GL_V$ により V は kX -余加群の構造をもつから, 上記の補題のように $V = \bigoplus_{g \in X} V_g$ と書ける. このとき余加群構造と群作用の関係を考えれば, 任意の $m \in \bar{M} = G(k)$ について, 各 V_g ($g \in X$) の 0 でない各元は m の固有ベクトルになっていることが分かる. よって各 V_g の基底をとって V の基底を作れば, それにより \bar{M} は同時対角化される.

(\Rightarrow) $GL_n(k)$ の対角行列全体のなす (閉) 部分群を D_n とおく. M が同時対角化可能ということは, ある $g \in GL_n$ が存在して $m \mapsto g^{-1}mg$ が M から D_n への単射群準同型になっていることを意味する. このとき $g^{-1}\bar{M}g \subset D_n$ だから, \bar{M} も同時対角化可能となる. 従って $M = \bar{M}$ としてよい. そして改めて同時対角化による閉埋め込み

$$M \hookrightarrow D_n \simeq \underbrace{G_m(k) \times \cdots \times G_m(k)}_n$$

を考える. これに対応するホップ代数射 $k[G_m(k) \times \cdots \times G_m(k)] = k[G_m(k)]^{\otimes n} \rightarrow k[M]$ は全射であり, さらに

$$k[G_m(k)] \simeq \begin{cases} k[X, X^{-1}] & (k \text{ が無限体のとき}) \\ k[X]/(X^{q-1} - 1) & (k \text{ が位数 } q \text{ の有限体のとき}) \end{cases} \quad (X \text{ は群様元})$$

だから, G を $k[M]$ の群様元全体のなす群とすると $k[M] = kG$. 従って M に対応するアフィン群スキームは対角化可能である. \square