2012 年度 代数学 I

線形表現と余加群

天野勝利

(2012 年 5 月 25 日〜6 月 1 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, "Introduction to affine group schemes", Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます．この資料は本の Ch. 3 にあたる部分の講義ノートです．

3.1 線形表現

k を可換環とし, 基礎環として固定する (ただし, 3.3 節以降はずっと k を体と仮定する)．V を k-加群とするとき, アフィン群スキームの V 上の線形表現を下記のように定義する．

まず, $\mathbf{GL}_V$ という群関手を

$$\mathbf{GL}_V : R \mapsto \{V \otimes_k R \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R \ \ R\text{-加群同型}\} \quad (\text{積は写像の合成})$$

により定める．射の対応は, k-代数射 $\varphi : R \to S$ に対し, $\mathbf{GL}_V(\varphi) : \mathbf{GL}_V(R) \to \mathbf{GL}_V(S)$ を, $h \in \mathbf{GL}_V(R)$ に対し

$$\mathbf{GL}_V(\varphi)(h) : V \otimes_k S \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R \otimes_R {}_\varphi S \xrightarrow[h \otimes \mathrm{id}_S]{\sim} V \otimes_k R \otimes_R {}_\varphi S \xrightarrow{\sim} V \otimes_k S$$

(${}_\varphi S$ は φ を介して S を R-加群とみなしたもの) とすることにより定める．ここで, $h \in \mathbf{GL}_V(R)$ は V への制限 $h|_V : V \to V \otimes_k R$, $v \mapsto h(v \otimes 1)$ により完全に定まっており, 単にこれを R-線形になるように拡張したものにすぎないことに注意しておこう．$\mathbf{GL}_V(\varphi)(h)$ も $(\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ h|_V : V \to V \otimes_k S$ を S-線形になるように拡張したものにすぎない．

定義 3.1 $\mathbf{G}$ を k 上のアフィン群スキーム, V を k-加群とするとき, $\mathbf{G}$ から $\mathbf{GL}_V$ への (群関手としての) 準同型を $\mathbf{G}$ の V 上の**線形表現 (linear representation)** と呼ぶ．

3.2　余加群

定義 3.2 A を k-ホップ代数, V を k-加群とする. k-加群準同型 $\rho : V \to V \otimes_k A$ で次の二つの可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V \otimes_k A \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \\ V \otimes_k A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & V \otimes_k A \otimes_k A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & & V \otimes_k A \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\ & V \otimes_k k & \end{tikzcd}$$

を満たすものを V 上の**右 A-余加群構造 (right A-comodule structure)** と呼ぶ. またこのとき (V, ρ) を**右 A-余加群 (right A-comodule)** と呼ぶ.

ホップ代数の余積と同様に, 余加群構造にも次のような Σ 記法が用いられている:

$$\rho(v) = \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \in V \otimes_k A.$$

(V に含まれる部分が必ず 0 番になるように番号をつける.) この記法で上記の二つの可換図式の条件を書いてみると,

$$\sum \rho(v_{(0)}) \otimes v_{(1)} = \sum v_{(0)} \otimes \Delta(v_{(1)}) \ \left(= \textstyle\sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)} \text{ と書く}\right), \quad \sum v_{(0)} \varepsilon(v_{(1)}) = v$$

($^\forall v \in V$) となる.

定理 3.3 $\mathbf{G}$ を k 上のアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. V を k-加群とするとき, $\mathbf{G}$ の V 上の線形表現と V の右 A-余加群構造とは次のように双射的に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \{\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V \text{ 線形表現}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\rho : V \to V \otimes_k A \ \text{ 右 } A\text{-余加群構造}\} \\ \Phi & \mapsto & \Phi_A(\mathrm{id}_A)|_V. \end{array}$$

逆写像は $\rho \mapsto [\Phi_R : g \mapsto [v \otimes r \mapsto (\mathrm{id} \otimes g)(\rho(v))r]]$ で与えられる. (ただし, ここでは $\mathbf{G}(R)$ と $\mathrm{Alg}_k(A, R)$ とを同一視している.)

[証明] $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}\, A$ と仮定してよい.

($\longrightarrow$) $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ を線形表現とする. $\rho' = \Phi_A(\mathrm{id}_A) \in \mathbf{GL}_V(A)$ とし, これを V に制限したものを $\rho = \rho'|_V : V \to V \otimes_k A$ とおく.

Φ は関手間射なので, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ と $g \in \mathbf{G}(R) = \mathrm{Alg}_k(A, R)$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(A) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "\mathbf{G}(g)"'] & \mathbf{GL}_V(A) \arrow[d, "\mathbf{GL}_V(g)"] \\ \mathbf{G}(R) \arrow[r, "\Phi_R"'] & \mathbf{GL}_V(R) \end{tikzcd}$$

は可換である．この図式における $\mathrm{id}_A \in \mathbf{G}(A)$ の行先を考えれば

$$\Phi_R(g) = \mathbf{GL}_V(g)(\Phi_A(\mathrm{id}_A)) = \mathbf{GL}_V(g)(\rho')$$

を得る．故に, $\Phi_R(g)$ は $(\mathrm{id}\otimes g)\circ\rho : V \to V\otimes_k R$ を R-線形になるよう拡張したものに他ならない．すなわち Φ_R は

$$\Phi_R : g \mapsto [v\otimes r \mapsto (\mathrm{id}\otimes g)(\rho(v))r]$$

という写像になっている．

次に ρ が V 上の右 A-余加群構造になることを示す．まず, A の余単位射 $\varepsilon \in \mathbf{G}(k)$ は $\mathbf{G}(k)$ の単位元なので, $\Phi_k(\varepsilon)$ は $\mathbf{GL}_V(k) = GL(V)$ の単位元, つまり V の恒等写像でなければならない．一方, 先程の説明より $\Phi_k(\varepsilon)$ は $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\rho$ と同じ写像だから,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & V\otimes_k A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\ & V\otimes_k k \end{tikzcd}$$

の可換性が分かる．

任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ と $g,h \in \mathbf{G}(R)$ に対し, 積 $gh = m\circ(g\otimes h)\circ\Delta$ を考えると, $\Phi_R(gh) = \mathbf{GL}_V(gh)(\rho')$ は $(\mathrm{id}\otimes gh)\circ\rho$ を R-線形になるように拡張したものであるから, V に制限すると

$$\Phi_R(gh)|_V : V \xrightarrow{\rho} V\otimes_k A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} V\otimes_k A\otimes_k A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g\otimes h} V\otimes_k R\otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V\otimes_k R \quad (3.1)$$

となる．一方, $\Phi_R(g)$, $\Phi_R(h)$ はそれぞれ $(\mathrm{id}\otimes g)\circ\rho$, $(\mathrm{id}\otimes h)\circ\rho$ を R-線形になるように拡張したものだから, $\Phi_R(g)\circ\Phi_R(h)$ を V に制限すると

$$\begin{aligned} & (\Phi_R(g)\circ\Phi_R(h))|_V \\ = \ & (V \xrightarrow{\rho} V\otimes_k A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes h} V\otimes_k R \xrightarrow{\rho\otimes\mathrm{id}} V\otimes_k A\otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g\otimes\mathrm{id}} V\otimes_k R\otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V\otimes_k R) \\ = \ & (V \xrightarrow{\rho} V\otimes_k A \xrightarrow{\rho\otimes\mathrm{id}} V\otimes_k A\otimes_k A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g\otimes h} V\otimes_k R\otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V\otimes_k R) \qquad (3.2) \end{aligned}$$

となる．Φ_R は群準同型だから $\Phi_R(gh) = \Phi_R(g)\circ\Phi_R(h)$, 従って, (3.1) と (3.2) とは一致していなければならない．ここで, $R = A\otimes_k A$, $g : a \mapsto a\otimes 1$, $h : b \mapsto 1\otimes b$ とすれば $V\otimes_k A\otimes_k A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g\otimes h} V\otimes_k R\otimes_k R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} V\otimes_k R$ の部分は恒等写像になってしまうので,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V\otimes_k A \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \\ V\otimes_k A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & V\otimes_k A\otimes_k A \end{tikzcd}$$

の可換性を得る. 以上より, ρ が V 上の右 A-余加群構造になることがいえた.

($\longleftarrow$) $\rho : V \to V \otimes_k A$ を右 A-余加群構造とする. この ρ を右 A-線形になるように拡張したものを $\rho' : V \otimes_k A \to V \otimes_k A$ とすると, これは A-加群同型になる (逆写像は $v \otimes a \mapsto \sum v_{(0)} \otimes S(v_{(1)})a$) ので, $\rho' \in \mathbf{GL}_V(A)$ である. すると, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し

$$\Phi_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{GL}_V(R), \quad g \mapsto \mathbf{GL}_V(g)(\rho')$$

とすることにより $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ という関手間射が得られる. さて, ρ は余加群構造だから $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$ で, 従って, 任意の $g, h \in \mathbf{G}(R)$ に対して上記の (3.1) と (3.2) とは一致する. よって, ($\mathbf{GL}_V(R)$ の元はその V への制限によって完全に定まるのであったから) $\Phi_R(gh) = \Phi_R(g) \circ \Phi_R(h)$ を得る. 従って Φ は群関手の準同型である. □

例 3.4 上の定理で $V = A$ とするとき, $\Delta : A \to A \otimes_k A$ は右 A-余加群構造になっている. これに対応する線形表現を $\mathbf{G}$ の**正則表現 (regular representation)** という.

部分余加群/部分表現. $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$, (V, ρ) を右 A-余加群とし, ρ に対応する線形表現を $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ とおく. V の k-加群直和因子 W が $\rho(W) \subset W \otimes_k A$ を満たすとき, $(W, \rho|_W)$ を (V, ρ) の**部分余加群 (subcomodule)** という. なお, $\rho(W) \subset W \otimes_k A$ という条件は, $^\forall R \in {}_k\mathcal{A}$, $^\forall g \in \mathbf{G}(R)$ に対し $W \otimes_k R$ が $\Phi_R(g) : V \otimes_k R \xrightarrow{\sim} V \otimes_k R$ で不変 (i.e. $\Phi_R(g)(W \otimes_k R) \subset W \otimes_k R$) であることと同値である. 部分余加群 $(W, \rho|_W)$ に対応する線形表現 $\mathbf{G} \to \mathbf{GL}_W$ は $g \mapsto \Phi_R(g)|_{W \otimes_k R}$ により与えられる. これは Φ の**部分表現**と呼ばれる.

商余加群/商表現. さらに上の状況で, 商加群 $\bar{V} = V/W$ を考える. もし W が部分余加群なら, $V \xrightarrow{\rho} V \otimes_k A \twoheadrightarrow \bar{V} \otimes_k A$ が $\bar{V}$ を経由するので, ρ から $\bar{V}$ 上の右 A-余加群構造 $\bar{\rho} : \bar{V} \to \bar{V} \otimes_k A$ が誘導される. この $(\bar{V}, \bar{\rho})$ を (V, ρ) の**商余加群 (quotient comodule)** と呼ぶ. また, それに対応する線形表現 $\mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\bar{V}}$ を Φ の**商表現**という.

線形表現のテンソル積. $\Phi_1 : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{V_1}$, $\Phi_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{V_2}$ をアフィン群スキーム $\mathbf{G}$ の二つの線形表現とするとき, 関手間射 $\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{V_1 \otimes_k V_2}$ を

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2)_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{GL}_{V_1 \otimes_k V_2}(R), \quad g \mapsto \Phi_{1,R}(g) \otimes_R \Phi_{2,R}(g) \qquad (R \in {}_k\mathcal{A})$$

により定める ($(V_1 \otimes_k R) \otimes_R (V_2 \otimes_k R) \simeq V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k R$ に注意) と, これは $\mathbf{G}$ の $V_1 \otimes_k V_2$ 上の線形表現となる. この $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ を Φ_1 と Φ_2 の**テンソル積 (表現)** と呼ぶ. Φ_1, Φ_2 に対応する余加群構造を ρ_1, ρ_2 とおくと, $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ に対応する余加群構造は

$$\rho_1 \otimes_A \rho_2 : V_1 \otimes_k V_2 \to V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k A, \quad v \otimes v' \mapsto \sum v_{(0)} \otimes v'_{(0)} \otimes v_{(1)} v'_{(1)}$$

で与えられる.

線形表現の双対. 定理 3.3 の状況で, 線形表現 Φ と余加群構造 ρ とが対応しているとする. ここで V は k-加群として有限生成かつ射影的であったと仮定し, 双対加群 $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ を考える. 関手間射 $\Phi^\vee : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{V^*}$ を, $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し

$$\Phi^\vee_R : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{V^*}, \quad g \mapsto \Phi_R(g^{-1})^* \quad (\Phi_R(g^{-1}) \text{ の } R\text{-加群双対})$$

とすることにより定めると, これは $\mathbf{G}$ の V^* 上の線形表現となる. この $\Phi^\vee$ を Φ の**双対 (表現)** と呼ぶ. これに対応する余加群構造は

$$\begin{array}{rccc} \rho^\vee : V^* & \to & \mathrm{Hom}_k(V,A) & \xrightarrow{\sim} \ V^* \otimes_k A \\ f & \mapsto & [v \mapsto \sum f(v_{(0)})S(v_{(1)})] & \end{array}$$

で与えられる.

演習 3.5 上記の４つのパラグラフに書いてあることを確かめよ.

それから, (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) を二つの余加群とすると, 直和 $(V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ も自然に余加群となる ($(V_1 \otimes_k R) \oplus (V_2 \otimes_k R) \simeq (V_1 \oplus V_2) \otimes_k R$ に注意). また, ある余加群 V の二つの部分余加群があるとき, その二つの和も自然に V の部分余加群となる.

$\mathbf{GL}_V$ と $\mathbf{GL}_n$. ここで V が階数 n $(< \infty)$ の自由 k-加群であった場合を考えよう. V の基底を一組選んでおき, それを $\{v_1, \dots, v_n\}$ とする. また, $H = k[X, 1/\det X]$ $(X = (X_{ij})_{i,j})$ を $\mathbf{GL}_n$ の座標環とする. このとき同型 $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$ が次のようにして構成できる: 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Alg}_k(H,R) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{GL}_n(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{GL}_V(R) \\ g & \mapsto & g(X) = (g(X_{ij}))_{i,j} & \mapsto & [\sum_{j=1}^n v_j \otimes r_j \mapsto \sum_{i,j=1}^n v_i \otimes g(X_{ij})r_j]. \end{array}$$

一番右は要するに, R 成分の n 項縦ベクトルに $g(X)$ を左からかける作用と同じで,

$$(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto (v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)(1 \otimes g(X)) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

とも書ける. この同型 $\mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_V$ を $\mathbf{GL}_n$ の V 上の線形表現とみたときに, これに対応する V の右 H-余加群構造を ρ_0 と書くことにする:

$$\rho_0 : V \to V \otimes_k H, \quad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes X_{ij} \quad (j = 1, \dots, n).$$

さて, $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A=k[\mathbf{G}]$ とするとき, $\mathbf{G}$ の V 上の任意の線形表現 $\Phi:\mathbf{G}\to\mathbf{GL}_V$ は必ず $\mathbf{GL}_n$ を経由する. つまり, ある準同型 $\Psi:\mathbf{G}\to\mathbf{GL}_n$ があって, $\Phi:\mathbf{G}\xrightarrow{\Psi}\mathbf{GL}_n\xrightarrow{\sim}\mathbf{GL}_V$ と書ける. この Ψ に対応するホップ代数射を $\psi:H\to A$ とすると, Φ に対応する V の右 A-余加群構造は

$$V\xrightarrow{\rho_0}V\otimes H\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\psi}V\otimes A,\quad v_j\mapsto\sum_{i=1}^n v_i\otimes\psi(X_{ij})\quad(j=1,\ldots,n)$$

と書ける. $\Delta(\psi(X_{ij}))=\sum_{s=1}^n\psi(X_{is})\otimes\psi(X_{sj})$ だから, 以上により次が言えたことになる:

補題 3.6 $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A=k[\mathbf{G}]$, V を $\{v_1,\ldots,v_n\}$ を基底とする階数 n $(<\infty)$ の自由 k-加群とし, V に右 A-余加群構造 $\rho:V\to V\otimes A$ が与えられているとする. このとき $\rho(v_j)=\sum_{i=1}^n v_i\otimes a_{ij}$ $(j=1,\ldots,n)$ となる $a_{ij}\in A$ をとれば,

$$\Delta(a_{ij})=\sum_{s=1}^n a_{is}\otimes a_{sj}\quad(i,j=1,\ldots,n)$$

が成立する. また $\det(a_{ij})_{i,j}$ は A の可逆元である.

3.3　有限性定理

この節から以下はずっと k は体であると仮定する.

定理 3.7 A を可換 k-ホップ代数, (V,ρ) を右 A-余加群とする. このとき V は k 上有限次元な部分余加群たちの有向和集合 (directed union) になっている. すなわち, ある有向集合 Λ により添え字づけられた k 上有限次元な V の部分余加群の族 $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ で $i<j\Rightarrow V_i\subset V_j$ なるものがあって, $V=\bigcup_{i\in\Lambda}V_i$ と書ける.

[略証] 任意の $v\in V$ に対し, v を含む k 上有限次元な部分余加群が必ず存在することを示せばよい. $\{a_i\}$ を A の k-基底とし,

$$\rho(v)=\sum_i v_i\otimes a_i\quad(\text{有限個の } i \text{ を除き } v_i=0)$$

と書く. このとき $V'=\mathrm{Span}_k\{v,v_i\}$ (v と v_i たちで生成される V の k-部分空間) が求める部分余加群となる. □

定理 3.8 任意の可換 k-ホップ代数 A は, k 上有限生成な部分ホップ代数たちの有向和集合である.

[略証] 右 A-余加群 (A, Δ) の任意の有限次元部分余加群 $V \subset A$ が, ある k 上有限生成な部分ホップ代数に含まれることを示せばよい. $\{v_i\}$ を V の基底とし, $\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$ となるような $a_{ij} \in A$ をとる. このとき $v_i, a_{ij}, S(v_i), S(a_{ij})$ たちで生成される A の k-部分代数は部分ホップ代数となる. □

この定理を言い換えると, 次のようになる:

系 3.9 体 k 上のアフィン群スキームは, 常に代数的アフィン群スキームたちの逆極限 (射影極限) である.

3.4 代数的なら GL_n の閉部分群に帰着すること

定理 3.10 $\mathbf{G}$ を体 k 上の代数的アフィン群スキームとするとき, ある閉埋め込み $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ $({}^{\exists}n \in \mathbb{Z}_{>0})$ が存在する.

[証明] $A = k[\mathbf{G}]$ とすると A は k 上有限生成なホップ代数なので, 定理 3.7 により, ある有限次元部分余加群 $V \subset A$ で $k[V] = A$ を満たすものがある. $n = \dim_k V$ とし, $\mathbf{GL}_n$ の座標環 $k[X, 1/\det X]$ $(X = (X_{ij})_{i,j})$ をとる. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし, $\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$ となる a_{ij} をとれば, 補題 3.6 により

$$k[X, 1/\det X] \to A, \quad X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

はホップ代数射である. 後はこれが全射であることを示せばよいが, それは $v_j = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(v_j)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(v_i) a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$ により従う. □

例 3.11 上記の定理の証明に沿って $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ の $\mathbf{GL}_2$ への閉埋め込みを構成する. $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ の座標環を $k[Y]$ (Y は原始元) とする. $V = k + kY$ とすれば, これは 2 次元の部分余加群で $k[V] = k[Y]$ を満たす. V の基底として $v_1 = 1$, $v_2 = Y$ をとれば,

$$\Delta(v_1, v_2) = (1 \otimes 1, 1 \otimes Y + Y \otimes 1) = (v_1 \otimes 1, v_2 \otimes 1) \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 1 \otimes Y \\ 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix}$$

だから, $\mathbf{GL}_2$ の座標環 $k[X, 1/\det X]$ からのホップ代数射

$$\varphi : k[X, 1/\det X] \to k[Y], \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. φ に対応する準同型を $\Phi : \mathbf{G}_\mathrm{a} \to \mathbf{GL}_2$ とすると, 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して Φ_R は

$$\Phi_R : \mathbf{G}_\mathrm{a}(R) \to \mathbf{GL}_2(R), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という群準同型である.

3.5 すべての有限次元線形表現を k^n から構成する

定義 3.12 A を可換 k-ホップ代数, (V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) を右 A-余加群とする. k-線形写像 $\varphi : V_1 \to V_2$ が A-**余加群射 (A-comodule map)** であるとは, 次の可換図式を満たすことをいう:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ {\scriptstyle \rho_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2} \\ V_1 \otimes_k A & \xrightarrow[\varphi\otimes\mathrm{id}]{} & V_2 \otimes_k A. \end{array}$$

余加群射 φ が全単射であれば, **余加群同型 (comodule isomorphism)** といい, V_1 と V_2 は余加群として同型であるという.

補題 3.13 A を可換 k-ホップ代数, (V,ρ) を k 上有限次元な右 A-余加群, $n = \dim_k V$ とする. このとき, ある単射 A-余加群射 $V \hookrightarrow A^n$ が存在する (ここで, A^n の余加群構造は (A,Δ) の n 個の直和としてのもの).

[略証] $(V \otimes_k A, \mathrm{id}_V \otimes \Delta)$ は A^n と同型な余加群であり, $\rho : V \to V \otimes_k A$ は単射 A-余加群射となる. □

定理 3.14 $\mathbf{G}$ を $\mathbf{GL}_n$ の閉部分群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. このとき $\mathbf{G}$ の k^n 上の線形表現 $\Phi : \mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_{k^n}$ が自然に存在する. $\mathbf{G}$ のすべての有限次元線形表現は, Φ から, テンソル積, 直和, 部分表現, 商表現, 双対, をとる操作を有限回行うことにより構成できる.

[証明] 上の補題により, (A,Δ) の有限個の直和 A^m の任意の有限次元部分余加群 V について主張が成り立てばよい. さらに, V は A^m から A への m 個の射影による V の像たちの直和と同型だから, 結局 (A,Δ) の任意の有限次元部分余加群 (これを改めて V とおく) が構成可能であればよい.

$B = k[\mathbf{GL}_n] = k[X, 1/\det X]$ $(X = (X_{ij})_{i,j})$ とおくと,

$$B = \bigcup_{r,s} B_{r,s}, \quad B_{r,s} = \frac{1}{(\det X)^r}\{f \in k[X] \mid \deg f \leq s\}$$

と書ける. この $B_{r,s}$ たちは右 B-余加群 (B,Δ) の有限次元部分余加群である. V はある $B_{r,s}$ の $B \twoheadrightarrow A$ ($\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}_n$ に対応するホップ代数射) による像に含まれているはずなので, 各 $B_{r,s}$ が右 B-余加群として k^n から構成されることを示せば証明は完了する.

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ を k^n の標準基底とする. このとき, $k^n \to B$, $v_j \mapsto X_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n)$ は単射 B-余加群射なので,

$$H_1 := \{f \in k[X] \mid f \text{ は斉次}, \deg f = 1\} \simeq (k^n)^{\oplus n}$$

となる．また，$H_s := \{f \in k[X] \mid f$ は斉次, $\deg f = s\}$ とおくと，自然な全射 B-余加群射

$$\underbrace{H_1 \otimes_k \cdots \otimes_k H_1}_{s} \twoheadrightarrow H_s$$

がある．また，$k \det X \subset H_n$ は 1 次元 B-部分余加群で，その双対は

$$(k \det X)^* \simeq k \frac{1}{\det X}$$

である．そして

$$B_{r,s} \simeq \underbrace{k\frac{1}{\det X} \otimes_k \cdots \otimes_k k\frac{1}{\det X}}_{r} \otimes_k \left(\bigoplus_{s' \leq s} H_{s'} \right) \quad (\text{ただし } H_0 = k)$$

となるから，$B_{r,s}$ が k^n から構成可能であることが示された． □

注意 3.15 上の定理で，もし $\mathbf{G}$ が $\mathbf{SL}_n$ の閉部分群スキームであったなら，双対は不要である．