2012 年度 代数学 I

対角化可能性・有限定数群・カルティェ双対

天野勝利

(2012 年 5 月 18 日〜5 月 25 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, "Introduction to affine group schemes", Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます. この資料は本の Ch. 2 部分 (2.1 節を除く) にあたる部分の講義ノートです.

2.2 対角化可能な群スキーム

k を可換環, M を可換群とするとき, M の k 上の群環 (M の元を基底とする自由 k-加群に M の積により k-代数構造を入れたもの) を kM と書く. kM には M の元が群様元となるような (可換) ホップ代数構造を入れることができる:

$$\Delta(m) = m \otimes m, \quad \varepsilon(m) = 1, \quad S(m) = m^{-1} \quad (m \in M).$$

定義 2.14 k 上のアフィン群スキーム $\mathbf{G}$ が**対角化可能 (diagonalizable)** であるとは, ある可換群 M が存在してホップ代数として $k[\mathbf{G}] \simeq kM$ となる (両者の間に全単射なホップ代数射が存在する) ことをいう.

例 2.15 (1) $k[\mathbf{G}_\mathrm{m}] \simeq k\mathbb{Z}$ なので, $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ は対角化可能.

(2) $k[\boldsymbol{\mu}_n] \simeq k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ なので, $\boldsymbol{\mu}_n$ も対角化可能.

(3) $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ を対角化可能なアフィン群スキームとする. $k[\mathbf{G}_1] \simeq kM_1$, $k[\mathbf{G}_2] \simeq kM_2$ となる可換群 M_1, M_2 をとれば, $k[\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2] \simeq kM_1 \otimes_k kM_2 \simeq k(M_1 \times M_2)$ となるので, $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ も対角化可能である.

定義 2.16 k 上のアフィン群スキーム $\mathbf{G}$ が**代数的 (algebraic)** であるとは, 座標環 $k[\mathbf{G}]$ が k 上有限生成であることをいう.

定理 2.17 $\mathbf{G}$ が代数的かつ対角化可能なアフィン群スキームであるとき,

$$\mathbf{G} \simeq \underbrace{\mathbf{G}_\mathrm{m} \times \cdots \times \mathbf{G}_\mathrm{m}}_{\text{有限}} \times \underbrace{\boldsymbol{\mu}_{n_1} \times \cdots \times \boldsymbol{\mu}_{n_r}}_{\text{有限}} \quad ({}^\exists n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}).$$

[略証] $k[\mathbf{G}] \simeq kM$ なる可換群 M をとると, $\mathbf{G}$ が代数的であることにより M が有限生成アーベル群であることがいえる. 後は有限生成アーベル群の基本定理により従う. $\square$

あとで 4.6 節において, ここで定義した対角化可能性が行列群の同時対角化可能性をホップ代数の言葉で簡明に記述したものであるということを確かめる.

さて, k が体であるときにもう少し詳しく対角化可能なアフィン群スキームの特徴づけを行いたい. まず, 次の補題を証明しておく:

補題 2.18 k を体, A を k-ホップ代数とする. このとき, A の群様元たちは k 上線形独立である.

[証明] $g_1, \ldots, g_n$ を k 上線形独立な A の群様元の組, g を $\{g_1, \ldots, g_n\}$ に含まれない A の群様元とするとき, $g, g_1, \ldots, g_n$ も k 上線形独立となることを示す.

$g, g_1, \ldots, g_n$ が k 上線形従属であったとすると, ($g_1, \ldots, g_n$ が線形独立なので) ある $c_1, \ldots, c_n \in k$ が存在して $g = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ と書ける. すると, $\Delta(g) = g \otimes g = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j g_i \otimes g_j$ である一方, $\Delta(g) = \sum_{i=1}^n c_i \Delta(g_i) = \sum_{i=1}^n c_i g_i \otimes g_i$ で, $g_i \otimes g_j$ たちは k 上線形独立だから, $c_i c_j = 0$ $(i \neq j)$, $c_i^2 = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を得る. また, $1 = \varepsilon(g) = \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon(g_i) = \sum_{i=1}^n c_i$ より $c_1, \ldots, c_n$ のうち 0 でないものが少なくとも 1 つはあるはずである. そうすると, ある j について $c_j = 1$ で, それ以外は $c_i = 0$ $(i \neq j)$ である他はない. 故に $g = g_j$ となるわけだが, これは $g \notin \{g_1, \ldots, g_n\}$ に反する. $\square$

定理 2.19 k を体, $\mathbf{G}$ を k 上のアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. M_A $(= \mathrm{g.l.}(A) \simeq \mathbf{X}_{\mathbf{G}})$ を A の群様元全体からなる群とすると, 上の補題により $kM_A \subset A$ とみなせる. このとき, $\mathbf{G}$ が対角化可能 $\Leftrightarrow A = kM_A$.

さらに, k 上の対角化可能なアフィン群スキームのなす圏は, $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{X}_{\mathbf{G}}$ により可換群の圏の逆圏と圏同値となる.

2.3 有限定数群スキーム

Γ を有限集合とする. $k^\Gamma := \{\Gamma \to k \ \ 写像\}$ とおくと, 点ごとの演算により k^Γ は可換 k-代数の構造をもつ. 各元 $\sigma \in \Gamma$ に対し, $e_\sigma \in k^\Gamma$ を $e_\sigma(\tau) = \delta_{\sigma,\tau}$ $(\tau \in \Gamma)$ により定義すると, k^Γ は $\{e_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma}$ を基底とする自由 k-加群であることが分かる. さらに k-代数としては, k^Γ は k の $\#\Gamma$ 個の直積と同型である: $e_\sigma^2 = e_\sigma$, $e_\sigma e_\tau = 0$ $(\sigma \neq \tau)$, $\sum_{\sigma \in \Gamma} e_\sigma = 1$.

命題 2.20 Γ を有限群とすると, k^Γ は次により定まるホップ代数構造をもつ:

$$\Delta(e_\sigma) = \sum_{\substack{\tau\rho=\sigma \\ \tau,\rho\in\Gamma}} e_\tau \otimes e_\rho, \quad \varepsilon(e_\sigma) = \delta_{\sigma,1}, \quad S(e_\sigma) = e_{\sigma^{-1}} \quad (\sigma \in \Gamma).$$

定義 2.21 有限群 Γ に対し, 上記のホップ代数 k^Γ が与えるアフィン群スキーム $\mathrm{Sp}\, k^\Gamma$ を Γ の**定数群スキーム (constant group scheme)** と呼び, Γ_k または単に Γ で表す. もし R が非自明な $(0,1$ 以外の$)$ ベキ等元を持たない可換 k-代数なら $\Gamma_k(R) \simeq \Gamma$ となる ($\sigma \in \Gamma$ と $[e_\tau \mapsto \delta_{\tau,\sigma}] \in \Gamma_k(R)$ が対応する).

2.4 カルティエ双対

加群の双対とテンソル積. k を可換環とし, k-加群の圏を Mod_k と書くことにする. 加群の双対をとる操作として, 反変関手 $(-)^* : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ を次のように定める:

- 対象については, 任意の k-加群 M に対し, $M^* := \mathrm{Hom}_k(M,k)$,
- 射については, 任意の k-加群 M,N について,

$$\mathrm{Hom}_k(M,N) \to \mathrm{Hom}_k(N^*,M^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^* := [f \mapsto f \circ \varphi].$$

演習 2.22 これが実際に反変関手になっていることを確かめよ.

補題 2.23 M,N が有限生成な射影的 k-加群であったとする. このとき,
(1) $M^* \otimes_k N^* \xrightarrow{\sim} (M \otimes_k N)^*$, $f \otimes g \mapsto [a \otimes b \mapsto f(a)g(b)]$.
(2) $\mathrm{Hom}_k(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(N^*,M^*)$, $\varphi \mapsto \varphi^*$.
(3) $N \xrightarrow{\sim} (N^*)^*$, $n \mapsto [f \mapsto f(n)]$.
(4) 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$ に対し, $(\varphi^*)^* = \varphi$ ((3) によって同一視).

[略証] 仮定がもっと強く M,N が階数有限の自由 k-加群であったなら, 基底をとって容易に証明できる. 一般に M,N が有限生成な射影的 k-加群であるときは, ある階数有限の自由 k-加群 F_M, F_N が存在して M,N は F_M, F_N の直和因子となる. このとき M^*, N^* も F_M^*, F_N^* の直和因子と同一視することができる.
(1) $M^* \otimes_k N^* \hookrightarrow F_M^* \otimes_k F_N^* \xrightarrow{\sim} (F_M \otimes_k F_N)^* \xrightarrow{\mathrm{proj}} (M \otimes_k N)^*$ が同型写像.
(2) $\mathrm{Hom}_k(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(F_M,F_N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(F_N^*,F_M^*) \xrightarrow{\mathrm{proj}} \mathrm{Hom}_k(N^*,M^*)$ が同型写像. ここで特に $M=k$ の場合を考えれば (3) を得る.
(4) $M \xrightarrow{\sim} (M^*)^* \xrightarrow{(\varphi^*)^*} (N^*)^* \xrightarrow{\sim} N$ が φ と一致することをいえばよい. □

補題 2.24 (1) M_1, M_2, N_1, N_2 を有限生成な射影的 k-加群, $\varphi : M_1 \to M_2$ と $\psi : N_1 \to N_2$ を k-加群準同型とするとき, 次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} M_2^* \otimes_k N_2^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi^* \otimes \psi^*"'] & (M_2 \otimes_k N_2)^* \arrow[d, "(\varphi \otimes \psi)^*"] \\ M_1^* \otimes_k N_1^* \arrow[r, "\sim"] & (M_1 \otimes_k N_1)^*. \end{tikzcd}$$

(2) M, N が有限生成な射影的 k-加群であるとき, 次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd} N^* \otimes_k M^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{tw}"'] & (N \otimes_k M)^* \arrow[d, "\mathrm{tw}^*"] \\ M^* \otimes N^* \arrow[r, "\sim"] & (M \otimes_k N)^*. \end{tikzcd}$$

カルティエ双対.

定義 2.25 k 上のアフィン群スキーム $\mathbf{G}$ が**有限 (finite)** であるとは, 座標環 $k[\mathbf{G}]$ が k-加群として有限生成かつ射影的であることをいう.

$\mathbf{G}$ を k 上のアフィン群スキーム, $\mathbf{G}$ は有限かつ可換であると仮定する. 後者の条件は座標環 $A = k[\mathbf{G}]$ が余可換なホップ代数で k-加群としては有限生成かつ射影的であることと同値である. このとき, A の積 $m : A \otimes_k A \to A$, 単位射 $u : k \to A$, 余積 $\Delta : A \to A \otimes_k A$, 余単位射 $\varepsilon : A \to k$, および対合射 $S : A \to A$ の双対をとって

$$\begin{aligned}
&m' : A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes_k A)^* \xrightarrow{\sim} A^* \otimes_k A^*, \\
&u' : A^* \xrightarrow{u^*} k^* \xrightarrow{\sim} k, \\
&\Delta' : A^* \otimes_k A^* \xrightarrow{\sim} (A \otimes_k A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*, \\
&\varepsilon' : k \xrightarrow{\sim} k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} A^*, \\
&S^* : A^* \to A^*
\end{aligned}$$

という k-加群準同型たちを考える.

定理 2.26 (カルティエ双対性) $\mathbf{G}$ を k 上の有限かつ可換なアフィン群スキームとし, $A = k[\mathbf{G}]$ とおく. このとき A^* は上記の Δ' を積, ε' を単位射とする可換 k-代数の構造をもち, さらに, m' を余積, u' を余単位射, S^* を対合射として余可換なホップ代数となる. 従って, A^* はまた別の有限かつ可換なアフィン群スキーム $\mathbf{G}^*$ を表現する. この $\mathbf{G}^*$ を $\mathbf{G}$ の**カルティエ双対 (Cartier dual)** と呼ぶ. この双対をとる操作を二回行うと $(\mathbf{G}^*)^* \simeq \mathbf{G}$ となる. また, $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ を有限・可換なアフィン群スキームとするとき, 群として $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{H}^*, \mathbf{G}^*)$ である.

[略証] A の積の結合律, 単位律, 余積の余結合律, 余可換性, 余単位律, および対合射の満たすべき条件, を表す可換図式をそれぞれ描いて, その双対をとれば A^* が余可換かつ可換なホップ代数の構造をもつことが分かる. $(\mathbf{G}^*)^* \simeq \mathbf{G}$ も容易. 最後の主張について, $B = k[\mathbf{H}]$ とおき, B から A へのホップ代数射全体を $\mathrm{Hopf}_k(B, A)$ と書くことにする. $\mathrm{Hopf}_k(B, A)$ は $\mathrm{Alg}_k(B, A)$ $(\simeq \mathbf{H}(A))$ の部分群になり, 群として $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \simeq \mathrm{Hopf}_k(B, A)$ となる. $\mathrm{Hopf}_k(B, A)$ の元 φ と ψ の積は $B \xrightarrow{\Delta} B \otimes_k B \xrightarrow{\varphi \otimes \psi} A \otimes_k A \xrightarrow{m} A$ で与えられるが, これの双対をとると $A^* \xrightarrow{m'} A^* \otimes_k A^* \xrightarrow{\varphi^* \otimes \psi^*} B^* \otimes_k B^* \xrightarrow{\Delta'} B^*$ となるので, $\mathrm{Hopf}_k(B, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hopf}_k(A^*, B^*)$, $\varphi \mapsto \varphi^*$ が群同型であることが分かる. $\square$

演習 2.27 次を示せ.

(1) 有限アーベル群 Γ について, $(\Gamma_k)^* \simeq \mathrm{Sp}\, k\Gamma$.

(2) k の標数が素数 p であるとき, $(\boldsymbol{\alpha}_p)^* \simeq \boldsymbol{\alpha}_p$.

基礎環の変更について. k' を可換環, $k \to k'$ を環準同型とする. このとき A を k'-代数とすると, $k \to k' \xrightarrow{u} A$ により A を k-代数とみなすこともできる. また, k'-代数射を k-代数射とみなすこともできるので, それにより関手 ${}_{k'}\mathcal{A} \to {}_k\mathcal{A}$ が一つ定まる.

k 上の集合関手 $\mathbf{F} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ に対し, $\mathbf{F}_{k'} : {}_{k'}\mathcal{A} \to {}_k\mathcal{A} \xrightarrow{F} \underline{\mathrm{Set}}$ を「k'-代数に制限された $\mathbf{F}$」または「基礎環を k' に変更した $\mathbf{F}$」と呼ぶことがある. このときもし $\mathbf{F}$ が座標環 A により表現されるアフィン群スキームであったなら, $\mathbf{F}_{k'}$ は $A \otimes_k k'$ により表現される k' 上のアフィン群スキームとなる.

また, カルティエ双対と基礎環の変更には互換性がある $((\mathbf{G}_{k'})^* \simeq (\mathbf{G}^*)_{k'})$ ことが次の補題から分かる:

補題 2.28 M を有限生成な射影的 k-加群とすると, 任意の環準同型 $k \to k'$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_k(M, k) \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k'}(M \otimes_k k', k'), \quad f \otimes a \mapsto [m \otimes b \mapsto abf(m)].$$

演習 2.29 この補題を証明せよ. (補題 2.23 (1), (2) の証明と方法はだいたい同じ.)

余代数射について. A, B を k-ホップ代数とするとき, 次の二つの可換図式を満たす k-加群準同型 $\varphi : B \to A$ を**余代数射 (coalgebra map)** と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A & B \otimes B \arrow[l, "\varphi \otimes \varphi"] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

ある k-加群準同型 $B \to A$ が代数射かつ余代数射であることとホップ代数射であることは同値である. B から A への (k-) 余代数射全体を $\mathrm{Coalg}_k(B, A)$ と書く. 特に A, B が k-加群として有限生成かつ射影的であるとき, $\mathrm{Coalg}_k(B, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_k(A^*, B^*)$, $f \mapsto f^*$ は全単射である.

また, k が $\{1\}$ を表現するホップ代数であったこと ($\Delta(1)=1\otimes 1$, $\varepsilon(1)=1$, $S(1)=1$) を思い出すと, $\mathrm{Coalg}_k(k,A)$ と A の群様元全体 $\mathrm{g.l.}(A)$ とが

$$\mathrm{Coalg}_k(k,A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{g.l.}(A), \quad f \mapsto f(1)$$

により双射的に対応することが分かる (逆写像は $g \mapsto [a \mapsto ag]$). $f,g \in \mathrm{Coalg}_k(k,A)$ に対し積 $f*g : a \mapsto af(1)g(1)$ をとれば, この積に関して $\mathrm{Coalg}_k(k,A)$ は群になり, 上記は群同型となる.

指標群関手としてのカルティエ双対.

定理 2.30 $\mathbf{G}$ を k 上の有限かつ可換なアフィン群スキーム, $A=k[\mathbf{G}]$ とすると, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し, 群同型

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^*(R) &= \mathrm{Alg}_k(A^*,R) = \mathrm{Alg}_R(A^*\otimes_k R, R) \simeq \mathrm{Coalg}_R(R, A\otimes_k R) \simeq \mathrm{g.l.}(A\otimes_k R) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_R, (\mathbf{G}_{\mathrm{m}})_R)\end{aligned}$$

が成立する.

[略証] $\mathrm{Coalg}_R(R, A\otimes_k R) \to \mathrm{Alg}_R(A^*\otimes_k R, R)$ が群同型であることだけまだはっきりしていないが, それは定理 2.26 の最後の主張を証明したのと同じようにして示せる. $\square$

従って, $\mathbf{G}^*$ は

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) : R \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_R, (\mathbf{G}_{\mathrm{m}})_R) \quad (R \in {}_k\mathcal{A})$$

という群関手と同型であることが分かる.

一般には $\mathbf{G},\mathbf{H}$ が表現可能であっても $\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{H}) : R \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_R,\mathbf{H}_R)$ という関手が表現可能になるかどうかはわからないが, $\mathbf{G}$ が有限であれば $\mathbf{Hom}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ は表現可能になる (Waterhouse の本の Ch. 7, Ex. 15).