2012 年度 代数学 I

アフィン群スキームとホップ代数

天野勝利

(2012 年 4 月 13 日〜5 月 18 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

講義はこの本をテキストに進めていきます. この資料は本の Ch. 1 (と Ch. 2 の最初の部分) にあたる部分の講義ノートです. 最初に準備として, 圏論の言葉についていくつか補足します.

0 圏と関手

大雑把に言うと, ある一定の範囲の数学的対象の集まりと, その間の「準同型」が指定されたときに, それらの組み合わせを圏 (category) と呼ぶ. 例えば,

- 集合とその間の写像
- 群と群準同型
- ある体 k 上のベクトル空間と線形写像
- 環と環準同型

は圏になる. 正確には次のように定義する:

定義 0.1 ある範囲の **対象 (objects)** とよばれるものの集まり (クラス) $\mathcal{O}$ と, **射 (morphism)** とよばれるものの集まり $\mathcal{M}$ の組 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ が次の条件 (i)–(iii) を満たすとき, $\mathcal{C}$ は **圏 (category)** であるという.

(i) 任意の射 $f \in \mathcal{M}$ に対し, f の定義域 (domain) と呼ばれる対象と値域 (codomain) と呼ばれる対象がひとつずつ指定されている. f の定義域が A で値域が B であるとき $f : A \to B$ と書き, f は A から B への射であるという. また, 任意の二つの対象 $A, B \in \mathcal{O}$ に対し, A から B への射全体 (これを $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ と書く) は集合をなす.

(ii) 任意の対象 $A, B, C \in \mathcal{O}$ と射 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対し, f と g の合成と呼ばれる射 $g \circ f : A \to C$ が定まる. また, 射の合成に関して結合律が成り立つ.

(iii) 任意の対象 $A \in \mathcal{O}$ に対し, 恒等射とよばれる射 $\mathrm{id}_A : A \to A$ が定まっている. そして, 任意の射 $f : A \to B$ に対し $\mathrm{id}_B \circ f = f$ かつ $f \circ \mathrm{id}_A = f$ が成立する.

圏 $\mathcal{C}$ の対象全体を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と書く. また, A が $\mathcal{C}$ の対象であるとき, ($A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と書く代わりに) $A \in \mathcal{C}$ と書くことがある.

定義 0.2 $\mathcal{C}$ を圏とするとき, 次で定まる圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を $\mathcal{C}$ の**逆圏 (opposite category)** (または**双対圏 (dual category)**) という.
(i) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
(ii) 任意の対象 A, B に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.
(iii) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における射の合成 $f \circ g$ は, $\mathcal{C}$ における合成 $g \circ f$ により定める.

定義 0.3 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を圏とするとき, $\mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が**関手 (functor)** (または**共変関手 (covariant functor)**) であるとは, 次の (i)–(iii) を満たすことをいう.
(i) $\mathcal{C}_1$ の任意の対象 A に対し, ある $\mathcal{C}_2$ の対象 $\mathbf{F}(A)$ が対応する. また, $\mathcal{C}_1$ の任意の射 $f : A \to B$ に対し, ある $\mathcal{C}_2$ の射 $\mathbf{F}(f) : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{F}(B)$ が対応する.
(ii) $\mathbf{F}$ は射の合成を保存する: $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$.
(iii) $\mathcal{C}_1$ の任意の対象 A に対し, $\mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(A)}$.
とくに $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ のとき, $\mathbf{F}(A) = A$, $\mathbf{F}(f) = f$ により定まる関手 $\mathbf{F}$ を恒等関手という.

なお, 上記の定義の (i) で $\mathbf{F}(f) : \mathbf{F}(B) \to \mathbf{F}(A)$ とし, (ii) で $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)$ として定義される対応は**反変関手 (contravariant functor)** と呼ばれる. 反変関手 $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ を定めることと, 共変関手 $\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}_2$ (または $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2^{\mathrm{op}}$) を定めることは同値である. また, 関手 $\mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ と $\mathbf{G} : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ に対し, 合成関手 $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ を自然に定めることができる.

定義 0.4 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を圏とし, $\mathbf{E}, \mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ を二つの関手とする. $\Phi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ が**関手間射 (functorial morphism)** (または **自然変換 (natural transformation)**) であるとは, 各 $R \in \mathcal{C}_1$ に対して $\mathcal{C}_2$ の射 $\Phi_R : \mathbf{E}(R) \to \mathbf{F}(R)$ が定められており, さらに, 任意の $\mathcal{C}_1$ の射 $\psi : R \to S$ に対し次の図式が可換になることをいう:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}(R) & \xrightarrow{\mathbf{E}(\psi)} & \mathbf{E}(S) \\ {\scriptstyle \Phi_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_S} \\ \mathbf{F}(R) & \xrightarrow[\mathbf{F}(\psi)]{} & \mathbf{F}(S). \end{array}$$

注意 0.5 上の「関手間射」という語は functorial morphism の訳語として私が勝手につけたものなので、たぶんこの講義の中でしか通用しません (普通は「自然変換」といいます).

定義 0.6 (1) $\mathcal{C}$ を圏とするとき, $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ が**同型射 (isomorphism)** であるとは, ある射 $g : B \to A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ となることをいう.

このとき g を f の逆射と呼び, $g = f^{-1}$ と書く. なお, 同型射は $f : A \xrightarrow{\sim} B$ のように書くことがある.

(2) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を圏, $\mathbf{E}, \mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ を二つの関手, $\Phi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ を関手間射とする. このとき Φ が**関手間同型 (functorial isomorphism)** であるとは, 任意の $R \in \mathcal{C}_1$ について Φ_R が同型射となることをいう. このとき Φ_R^{-1} たちで定義される $\mathbf{F}$ から $\mathbf{E}$ への関手間射 (これも関手間同型となる) を Φ^{-1} と書く. またこのような関手間同型が存在するとき, $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ は同型であるといい, $\mathbf{E} \simeq \mathbf{F}$ と書く.

定義 0.7 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を圏, $\mathbf{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ および $\mathbf{G} : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ を関手とする. もし $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ と $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ とが両方とも恒等関手と同型ならば, $\mathbf{F}$ (および $\mathbf{G}$) は**圏同値 (equivalence)** であるという. またこのとき $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ が圏同値 (equivalent) であるともいい, $\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{C}_2$ と書いたりする.

1 アフィン群スキーム

k を可換環とし, 基礎環として固定する. ${}_k\mathcal{A}$ を可換 k-代数の圏, $\underline{\mathrm{Grp}}$ を群の圏, $\underline{\mathrm{Set}}$ を集合の圏とする. また, ここだけの用語として, ${}_k\mathcal{A}$ から $\underline{\mathrm{Grp}}$ への関手 ${}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を群関手と呼び, $\underline{\mathrm{Set}}$ への関手 ${}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を集合関手と呼ぶことにする. 群関手は (群構造を忘れれば) 集合関手と思うこともできる.

1.1 何を考えたいか

アフィン群スキームとは, 一言でいうと「(座標環により) 表現可能な」群関手のことをいう. 例えば可換 k-代数 R があるとき, それに対して一般線形群 $\mathbf{GL}_n(R)$ を考えることができるが, このとき個別の $\mathbf{GL}_n(R)$ という群ではなく, それらを生み出す $\mathbf{GL}_n$ というものを一つの数学的対象として考えたい. つまり, $\mathbf{GL}_n$ という群関手

$$\mathbf{GL}_n : R \mapsto \{g \in M_n(R) \mid \det g \in R^\times\}$$

を考える. 他にも次のような群関手の例がある:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{SL}_n : & R \mapsto \{g \in M_n(R) \mid \det g = 1\} \\ \mathbf{G}_{\mathrm{m}} : & R \mapsto R^\times \quad (\text{乗法群}) \\ \mathbf{G}_{\mathrm{a}} : & R \mapsto R \quad (\text{加法群}) \\ \boldsymbol{\mu}_n : & R \mapsto \{a \in R \mid a^n = 1\} \quad (\text{乗法群}) \end{array}$$

また, k の標数が素数 p の場合, 次のような群関手もある:

$$\boldsymbol{\alpha}_p : R \mapsto \{a \in R \mid a^p = 0\} \quad (\text{加法群}).$$

さらに, 上記の例はすべて, アフィンスキームとしての構造をもっている. つまり, ある座標環があってそれにより表現可能である. そのようなものを考えたいわけだが, まず, 関手が表現可能であるとはどういうことかを定義していこう.

1.2　表現可能な関手

可換 k-代数 A, B に対し, A から B への k-代数射全体を $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ と書くことにする.

定義 1.8 (1) A を可換 k-代数とするとき, 集合関手 $\mathrm{Sp}\, A : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を次のように定義する. まず, 対象の対応は

$$\mathrm{Sp}\, A : R \mapsto \mathrm{Alg}_k(A, R)$$

により定める. そして射の対応は, k-代数射 $\varphi : R \to S$ に対して写像

$$(\mathrm{Sp}\, A)(\varphi) : \mathrm{Alg}_k(A, R) \to \mathrm{Alg}_k(A, S), \quad f \mapsto \varphi \circ f$$

を対応させる.

(2) $\mathbf{F}$ を集合関手とする. ある可換 k-代数 A が存在して $\mathbf{F} \simeq \mathrm{Sp}\, A$ となるとき, $\mathbf{F}$ は**表現可能 (representable)** である, または, A **により表現される (represented by** A**)** という.

定義 1.9 表現可能な集合関手を (k 上の) **アフィンスキーム (affine scheme)** と呼び, 表現可能な群関手を**アフィン群スキーム (affine group scheme)** という.

例 1.10 k 係数の 4 変数多項式環 $k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]$ を, $X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} - 1$ で生成されるイデアルで割った環

$$A = k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/(X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} - 1)$$

を考えると, 任意の可換 k-代数 R に対し,

$$\mathrm{Alg}_k(A, R) \to \mathbf{SL}_2(R), \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(X_{11}) & f(X_{12}) \\ f(X_{21}) & f(X_{22}) \end{pmatrix}$$

は全単射である. これにより同型 $\mathrm{Sp}\, A \simeq \mathbf{SL}_2$ が得られるので, $\mathbf{SL}_2$ はアフィン群スキームである.

演習 1.11 次を確かめよ.

(1) $\mathbf{GL}_n$ は $k[X_{11}, \ldots, X_{nn}, 1/\det(X_{ij})]$ により表現される.
(2) $\mathbf{SL}_n$ は $k[X_{11}, \ldots, X_{nn}]/(\det(X_{ij}) - 1)$ により表現される.
(3) $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ は $k[X, 1/X]$ により表現される.
(4) $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ は $k[X]$ により表現される.
(5) $\boldsymbol{\mu}_n$ は $k[X]/(X^n - 1)$ により表現される.
(6) k の標数が素数 p のとき, $\boldsymbol{\alpha}_p$ は $k[X]/(X^p)$ により表現される.

1.3　米田の補題

アフィンスキームの間の関手間射を準同型とすることにより, アフィンスキームの全体は圏をなす. 実は, この圏は ${}_k\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ と圏同値となる.

定理 1.12 (米田の補題) $A, B \in {}_k\mathcal{A}$, $\mathbf{E} = \mathrm{Sp}\, A$, $\mathbf{F} = \mathrm{Sp}\, B$ とする. このとき $\mathbf{E}$ から $\mathbf{F}$ への関手間射の全体と B から A への k-代数射全体 $\mathrm{Alg}_k(B, A)$ とが次により双射的に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{E} \to \mathbf{F} \ \ \text{関手間射}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Alg}_k(B, A) \\ \Phi & \mapsto & \Phi_A(\mathrm{id}_A). \end{array}.$$

[略証] 逆写像が $\varphi \mapsto [\Phi_R : f \mapsto f \circ \varphi]$ により与えられる. □

系 1.13 上記で Φ と φ が対応しているとき, Φ が関手間同型であることと φ が k-代数同型であることは同値である. この場合 φ の逆写像は $\Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_B)$ により与えられる.

定義 1.14 $\mathbf{F}$ を k 上のアフィンスキームとするとき, 上の系により, $\mathbf{F}$ を表現する可換 k-代数は同型を除き一意的に定まる. それを $\mathbf{F}$ の**座標環 (coordinate ring)** と呼び, $k[\mathbf{F}]$ と書く.

$\mathbf{E}, \mathbf{F}$ をアフィンスキームとするとき, 直積関手 $\mathbf{E} \times \mathbf{F} : R \mapsto \mathbf{E}(R) \times \mathbf{F}(R)$ が自然に定義される. $A = k[\mathbf{E}]$, $B = k[\mathbf{F}]$ とすると, 次の対応により, $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ は $A \otimes_k B$ で表現されるアフィンスキームであることが分かる:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Alg}_k(A, R) \times \mathrm{Alg}_k(B, R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Alg}_k(A \otimes_k B, R) \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & [a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)]. \end{array}$$

補題 1.15 (よく使う対応関係) $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ をそれぞれ $A, B, C, D \in {}_k\mathcal{A}$ で表現されるアフィンスキームとする.

(1) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi} B$, $B \xleftarrow{\psi} C$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \xrightarrow{\Psi\circ\Phi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi\circ\psi} C$ が対応する.

(2) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{H}$ と $A \xleftarrow{\varphi} C$, $B \xleftarrow{\psi} D$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \times \mathbf{F} \xrightarrow{\Phi\times\Psi} \mathbf{G} \times \mathbf{H}$ と $A \otimes_k B \xleftarrow{\varphi\otimes\psi} C \otimes_k D$ が対応する.

(3) $\mathbf{E} \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ と $A \xleftarrow{m} A \otimes_k A$ が対応する. (m は A の積をとる代数射.)

(4) $\mathbf{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{F}$, $\mathbf{E} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{\varphi} B$, $A \xleftarrow{\psi} C$ が対応しているとき, $\mathbf{E} \xrightarrow{(\Phi,\Psi)} \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ と $A \xleftarrow{m} A \otimes_k A \xleftarrow{\varphi\otimes\psi} B \otimes_k C$ が対応する.

演習 1.16 上記の補題の主張を確かめよ.

1.4　ホップ代数

すべての $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し単位元のみの群を対応させる群関手を $\{1\}$ と書く．これは k により表現されるアフィン群スキームである．実際, すべての R に対し $\mathrm{Alg}_k(k,R)$ は $[\alpha \mapsto \alpha \cdot 1]$ ($=: u$ と書く) というただ 1 つの元からなる集合である．

命題 1.17 $\mathbf{G} : {}_k\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を集合関手とする．$\mathbf{G}$ が群関手でもあるための必要十分条件は,

$$\begin{array}{rrl} \text{積} & \mathrm{mult}: & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}, \\ \text{単位元} & \mathrm{unit}: & \{1\} \to \mathbf{G}, \\ \text{逆元} & \mathrm{inv}: & \mathbf{G} \to \mathbf{G} \end{array}$$

という三つの関手間射が存在して次の図式 (1)(2)(3) が可換になることである．

(1) 結合律:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\mathrm{mult}\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mathrm{mult}"'] & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\ \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\mathrm{mult}"] & \mathbf{G} \end{tikzcd}$$

(2) 単位律:

$$\begin{tikzcd} \{1\} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\mathrm{unit}\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[d, "\mathrm{mult}"] & \mathbf{G} \times \{1\} \arrow[l, "\mathrm{id}\times\mathrm{unit}"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & \mathbf{G} & \end{tikzcd}$$

(3) 逆元:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[dr, "\mathrm{mult}"] & \\ \mathbf{G} \arrow[ur, "(\mathrm{id},\mathrm{inv})"] \arrow[r] \arrow[dr, "(\mathrm{inv},\mathrm{id})"'] & \{1\} \arrow[r, "\mathrm{unit}"] & \mathbf{G} \\ & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[ur, "\mathrm{mult}"'] & \end{tikzcd}$$

演習 1.18 この命題を証明せよ．

さて上記の命題において $\mathbf{G}$ が表現可能であるときは, 米田の補題により可換図式 (1)(2)(3) を k-代数射の可換図式に読みかえることができる．その読みかえた図式を満たすような k-代数が, ホップ代数と呼ばれるものである．

定義 1.19 A を可換 k-代数とする．もし, ある三つの k-代数射

$$\begin{array}{rrl} \text{余積 (comultiplication)} & \Delta: & A \to A \otimes_k A, \\ \text{余単位射 (counit)} & \varepsilon: & A \to k, \\ \text{対合射 (antipode)} & S: & A \to A \end{array}$$

が存在して次の図式 (1)(2)(3) が可換になるなら, A を **(可換) ホップ代数 (Hopf algebra)** と呼ぶ.

(1) 余結合律 (coassociativity):

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \otimes_k A & A \otimes_k A \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\ A \otimes_k A \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

(2) 余単位律 (counitary property):

$$\begin{tikzcd} k \otimes_k A & A \otimes_k A \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & A \otimes_k k \\ & A \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

(3) (対合射の満たすべき条件)

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[d, "m"'] & & A \otimes_k A \arrow[ll, "\mathrm{id}\otimes S"'] \\ A & k \arrow[l] & A \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes_k A \arrow[u, "m"] & & A \otimes_k A \arrow[ll, "S\otimes\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

定理 1.20 $\mathbf{G}$ をアフィンスキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする．$\mathbf{G}$ がアフィン群スキームになるための必要十分条件は, A がホップ代数の構造をもつことである．

注意 1.21 上の定理の十分性についてもう少し補足する．一般に, 可換 k-代数 A がホップ代数構造 Δ, ε, S をもっていたとしよう．このとき $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}\, A$ とすれば, $\mathbf{G}$ は次のようなアフィン群スキームとなる: 各 $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し, $\mathbf{G}(R) = \mathrm{Alg}_k(A, R)$ の積は, 米田の補題で Δ に対応する関手間射 mult を考えて,

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{mult}_R : \mathbf{G}(R) \times \mathbf{G}(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Alg}_k(A \otimes_k A, R) & \to & \mathbf{G}(R) \\ (f, g) & \mapsto & m \circ (f \otimes g) & \mapsto & m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (=: fg) \end{array}$$

で与えられることが分かる (この積が結合律を満たすことは可換図式 (1) が保証している). また, 米田の補題で ε に対応する関手間射 unit を考えて,

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{unit}_R : \mathrm{Alg}_k(k, R) & \to & \mathbf{G}(R) \\ u & \mapsto & u \circ \varepsilon\end{array}$$

となるので, $u \circ \varepsilon \in \mathbf{G}(R)$ が $\mathbf{G}(R)$ の単位元となる (実際に単位元になっていることは可換図式 (2) が保証している). また逆元は, 米田の補題で S に対応する関手間射 inv を考えて,

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{inv}_R : \mathbf{G}(R) & \to & \mathbf{G}(R) \\ f & \mapsto & f \circ S = f^{-1}\end{array}$$

で与えられる (実際に逆元になっていることは可換図式 (3) が保証している).

例 1.22 $A = k[\mathbf{SL}_n] = k[X_{11}, \ldots, X_{nn}]/(\det(X_{ij}) - 1)$ のホップ代数構造を調べてみよう. 積 $\mathbf{SL}_n \times \mathbf{SL}_n \to \mathbf{SL}_n$ を同型 $\mathrm{Sp}\, A \simeq \mathbf{SL}_n$, $\mathrm{Sp}(A \otimes_k A) \simeq \mathbf{SL}_n \times \mathbf{SL}_n$ を通じて読みかえた関手間射を $\Phi : \mathrm{Sp}(A \otimes_k A) \to \mathrm{Sp}\, A$ とおく. A の余積 Δ は米田の補題により Φ に対応する k-代数射である. それはすなわち,

$$\Phi_{A \otimes_k A} : \mathrm{Alg}_k(A \otimes_k A, A \otimes_k A) \to \mathrm{Alg}_k(A, A \otimes_k A)$$

による $\mathrm{id}_{A \otimes_k A}$ の像に他ならない. $\mathrm{id}_{A \otimes_k A}$ に対応する $\mathbf{SL}_n(A \otimes_k A) \times \mathbf{SL}_n(A \otimes_k A)$ の元は $((X_{ij} \otimes 1), (1 \otimes X_{ij}))$ である. その積をとった先は $(\sum_{s=1}^n X_{is} \otimes X_{sj}) \in \mathbf{SL}_n(A \otimes_k A)$ で, これに対応する $\mathrm{Alg}_k(A, A \otimes_k A)$ の元が Δ である:

$$\Delta : X_{ij} \mapsto \sum_{s=1}^n X_{is} \otimes X_{sj}.$$

A の余単位射 ε は, $\mathbf{SL}_n(k)$ の単位元 (単位行列) に対応する $\mathrm{Alg}_k(A, k)$ の元である:

$$\varepsilon : X_{ij} \mapsto \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ}).$$

次に, $\mathrm{inv} : \mathbf{SL}_n \to \mathbf{SL}_n$ を同型 $\mathrm{Sp}\, A \simeq \mathbf{SL}_n$ を通じて読みかえた関手間射を $\Psi : \mathrm{Sp}\, A \to \mathrm{Sp}\, A$ とおく. Ψ_A による $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Alg}_k(A, A)$ の像が A の対合射 S である. id_A に対応する $\mathbf{SL}_n(A)$ の元は (X_{ij}) $(=: X$ とおく$)$ だから, これの inv_A による像 $X^{-1} \in \mathbf{SL}_n(A)$ に対応する $\mathrm{Alg}_k(A, A)$ の元が S となる:

$$S : X_{ij} \mapsto (X^{-1} \text{ の } (i, j) \text{ 成分}).$$

定義よりこれらの代数射は可換図式 (1)(2)(3) を満たすはずであるが, 実際にそれを確かめてみよう. 確かめるべきは代数射の等式なので, 生成元について成立していれ

ばよい:

(1) $$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(X_{ij}))=\sum_{s=1}^{n}\Delta(X_{is})\otimes X_{sj}=\sum_{s,t=1}^{n}X_{it}\otimes X_{ts}\otimes X_{sj}$$

$$=\sum_{s,t=1}^{n}X_{is}\otimes X_{st}\otimes X_{tj}=\sum_{s=1}^{n}X_{is}\otimes\Delta(X_{sj})=(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(X_{ij})).$$

(2) $$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Delta(X_{ij}))=\sum_{s=1}^{n}\varepsilon(X_{is})X_{sj}=\sum_{s=1}^{n}\delta_{is}X_{sj}=X_{ij},$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\Delta(X_{ij}))=\sum_{s=1}^{n}X_{is}\varepsilon(X_{sj})=\sum_{s=1}^{n}X_{is}\delta_{sj}=X_{ij}.$$

(3) $$(m((\mathrm{id}\otimes S)(\Delta(X_{ij}))))_{i,j}=\left(\sum_{s=1}^{n}X_{is}S(X_{sj})\right)_{i,j}=XX^{-1}=(\delta_{ij})_{i,j}=(\varepsilon(X_{ij}))_{i,j},$$

$$(m((S\otimes\mathrm{id})(\Delta(X_{ij}))))_{i,j}=\left(\sum_{s=1}^{n}S(X_{is})X_{sj}\right)_{i,j}=X^{-1}X=(\delta_{ij})_{i,j}=(\varepsilon(X_{ij}))_{i,j}.$$

演習 1.23 $\mathbf{GL}_n$, $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$, $\boldsymbol{\mu}_n$, $\boldsymbol{\alpha}_p$ のホップ代数構造をそれぞれ調べよ.

Σ 記法. ホップ代数の一般論を述べる時に余積 Δ を記述するための非常に便利な記法があるので, それについて補足する. A をホップ代数とするとき, 一般には $a\in A$ について

$$\Delta(a)=\sum_{i=1}^{n}b_i\otimes c_i\quad(b_i,c_i\in A)$$

のように書けるわけだが, いちいち b_i,c_i という新しい記号を用意してこのように書くのは非常に面倒くさいし, 見通しも悪くなる. というわけで, これを単に

$$\Delta(a)=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}$$

と書く. このような記号法を Σ 記法 (sigma notation) という. 例えばこの記法で余結合律を表してみると,

$$\sum\Delta(a_{(1)})\otimes a_{(2)}=\sum a_{(1)}\otimes\Delta(a_{(2)})\quad({}^{\forall}a\in A)$$

となる. つまり, どこに Δ を施しても結局は同じものになるわけだが, これをさらに

$$=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}$$

と書く. これで「a に二回 Δ を施したもの」を表す. さらにこれを繰り返して,

$$\sum\Delta(a_{(1)})\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}=\sum a_{(1)}\otimes\Delta(a_{(2)})\otimes a_{(3)}=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes\Delta(a_{(3)})$$
$$=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}\otimes a_{(4)}$$

などと書いていく.

また, この Σ 記法で余単位律を表してみると

$$\sum \varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = a = \sum a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}) \quad ({}^{\forall}a \in A)$$

となる. それから, 対合射 S が満たすべき条件は次のように表される:

$$\sum S(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)\cdot 1 = \sum a_{(1)}S(a_{(2)}) \quad ({}^{\forall}a \in A).$$

慣れると非常に便利な記法である.

演習 1.24 A をホップ代数, $f : A \to A$ を k-加群準同型, $a \in A$ とする. 次を確かめよ.

(1) $\sum a_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(a_{(i)}) \otimes \cdots \otimes a_{(n+1)} = \sum a_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(a_{(i)})a_{(i+1)} \otimes \cdots \otimes a_{(n+1)}$
$= \sum a_{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{(i-1)}\varepsilon(a_{(i)}) \otimes \cdots \otimes a_{(n+1)} = \sum a_{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{(n)}$.

(2) $\sum \varepsilon(a_{(2)}) \otimes f(a_{(1)}) = f(a)$.

(3) $\sum f(a_{(2)}) \otimes \varepsilon(a_{(1)}) = f(a)$.

(4) $\sum f(a_{(2)}) \otimes \Delta(a_{(1)}) = \sum f(a_{(3)}) \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

(5) $\sum \Delta(a_{(2)}) \otimes f(a_{(1)}) = \sum a_{(2)} \otimes a_{(3)} \otimes f(a_{(1)})$.

(6) $\sum f(a_{(1)}) \otimes \varepsilon(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} = \sum f(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$.

(7) $\sum a_{(1)} \otimes f(a_{(3)}) \otimes \varepsilon(a_{(2)}) = \sum a_{(1)} \otimes f(a_{(2)})$.

(8) $\sum \varepsilon(a_{(1)}) \otimes f(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} = \sum f(a_{(2)}) \otimes a_{(1)}$.

(9) $\sum \varepsilon(a_{(1)}) \otimes \varepsilon(a_{(3)}) \otimes f(a_{(2)}) = f(a)$.

(10) $\sum \Delta(a_{(1)})(S(a_{(3)}) \otimes S(a_{(2)})) = \varepsilon(a)(1 \otimes 1)$.

要領としては, Σ 記法中の $a_{(i)}$ の部分に Δ をかけた場合, その部分は $a_{(i)} \otimes a_{(i+1)}$ となり, もともと $a_{(i+1)}, a_{(i+2)}, \ldots$ だった部分があればそこは番号が一つ増えて $a_{(i+2)}, a_{(i+3)}, \ldots$ となる. また, $\varepsilon(a_{(i)})$ は $a_{(i-1)}$ または $a_{(i+1)}$ の部分に繰り入れてしまうことができて, そのとき, もともと $a_{(i+1)}, a_{(i+2)}, \ldots$ だった部分があればそこは番号が一つ減って $a_{(i)}, a_{(i+1)}, \ldots$ となる. 対合射に関しては, $a_{(i)}S(a_{(i+1)})$ や $S(a_{(i)})a_{(i+1)}$ の部分は $\varepsilon(a_{(i)})\cdot 1$ となり, もともと $a_{(i+2)}, a_{(i+3)}, \ldots$ だった部分があればそこは番号が一つ減って $a_{(i+1)}, a_{(i+2)}, \ldots$ となる.

1.5 可換群と余可換ホップ代数

アフィン群スキーム $\mathbf{G}$ が**可換** (または**アーベル的**) であるとは, 任意の $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対し, $\mathbf{G}(R)$ が可換群になることをいう. これは, 次の図式が可換になることと同値である:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[rr, "\mathrm{tw}"] \arrow[dr, "\mathrm{mult}"'] & & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[dl, "\mathrm{mult}"] \\
& \mathbf{G} &
\end{tikzcd}
$$

(tw は $(a,b)\mapsto(b,a)$ により定まる関手間射). これをさらに座標環 $A=k[\mathbf{G}]$ に関する図式に置き換えると,

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes_k A & & A\otimes_k A \arrow[ll, "\mathrm{tw}"'] \\
& A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

(こちらの tw は $a\otimes b\mapsto b\otimes a$ により定まる k-代数射) となる. 上記の図式が可換になるようなホップ代数 A は**余可換 (cocommutative)** であるという. Σ 記法で書くなら, ホップ代数 A について,

$$A \text{ が余可換} :\Leftrightarrow \sum a_{(1)}\otimes a_{(2)} = \sum a_{(2)}\otimes a_{(1)} \quad ({}^\forall a\in A).$$

である.

2.1 アフィン群スキームの準同型, 閉部分群スキーム

アフィン群スキームの準同型. アフィンスキームの圏における射は関手間射であるが, それがアフィン群スキームの準同型となるには, さらに「群準同型」でなければならない.

定義 2.1 (1) $\mathbf{G},\mathbf{H} : {}_k\mathcal{A}\to \underline{\mathrm{Grp}}$ を二つの群関手, $\Phi:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ を関手間射とする. Φ が (群関手の) **準同型 (homomorphism)** であるとは, すべての $R\in {}_k\mathcal{A}$ について $\Phi_R:\mathbf{G}(R)\to\mathbf{H}(R)$ が群準同型となることをいう.

(2) アフィン群スキームの準同型とは, 群関手の準同型のことである.

$\mathbf{G},\mathbf{H}$ をアフィン群スキーム, $\Phi:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ を関手間射とする. また, $A=k[\mathbf{G}], B=k[\mathbf{H}]$ とし, $\varphi:B\to A$ を Φ に対応する k-代数射とする. このとき Φ が (アフィン群スキームの) 準同型であるための条件を可換図式で表してみると,

$$
\text{(積を保存)}\quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{H} \\
\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[u, "\mathrm{mult}"] \arrow[r, "\Phi\times\Phi"'] & \mathbf{H}\times\mathbf{H} \arrow[u, "\mathrm{mult}"']
\end{tikzcd}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\Delta"'] & B \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\Delta"] \\
A\otimes A & B\otimes B \arrow[l, "\varphi\otimes\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

となるが, この可換図式が成り立てばさらに次も可換になる:

(単位元を単位元に) $\begin{tikzcd} \mathbf{G} \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathbf{H} \\ & \{1\} \arrow[ul, "\mathrm{unit}"] \arrow[ur, "\mathrm{unit}"'] & \end{tikzcd}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & B \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd}$

φ がこれらの可換図式を満たすとき, φ は**ホップ代数射 (Hopf algebra map)** であるという.

一般に, A, B がホップ代数, $\varphi : B \to A$ が代数射であるとき, φ がホップ代数射であるための必要十分条件を Σ 記法で書くと,

$$\Delta(\varphi(a)) = \sum \varphi(a_{(1)}) \otimes \varphi(a_{(2)}), \quad \varepsilon(\varphi(a)) = \varepsilon(a) \quad ({}^\forall a \in B)$$

となる.

演習 2.2 群準同型が逆元を逆元に移すということを可換図式で表して, ホップ代数射が対合射と可換になることを確かめよ.

例 2.3 関手間射 $\Phi : \mathbf{GL}_n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ を $g \mapsto \det g$ により定義すると, これはアフィン群スキームの準同型となる. $A = k[\mathbf{GL}_n] = k[X_{11}, \ldots, X_{nn}, 1/\det(X_{ij})]$, $B = k[\mathbf{G}_{\mathrm{m}}] = k[X, 1/X]$ とおき, Φ に対応する代数射 $\varphi : B \to A$ を考える. $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Alg}_k(A, A)$ に対応する $\mathbf{GL}_n(A)$ の元は (X_{ij}) であり, これを Φ_A で送った先は $\det(X_{ij}) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(A)$ となる. φ はこれに対応する $\mathrm{Alg}_k(B, A)$ の元に他ならない:

$$\varphi : X \mapsto \det(X_{ij}).$$

この φ がホップ代数射であることは Φ が準同型であることにより保証されているが, 次のように直接確かめることもできる:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi(X)) &= \Delta(\det(X_{ij})) = \det(\Delta(X_{ij})) = \det(\sum_{s=1}^{n} X_{is} \otimes X_{sj}) \\ &= \det((X_{ij} \otimes 1)_{i,j} \cdot (1 \otimes X_{ij})_{i,j}) = (\det(X_{ij} \otimes 1))(\det(1 \otimes X_{ij})) \\ &= ((\det(X_{ij})) \otimes 1)(1 \otimes (\det(X_{ij}))) = (\det(X_{ij})) \otimes (\det(X_{ij})) \\ &= \varphi(X) \otimes \varphi(X) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta(X)). \\ \varepsilon(\varphi(X)) &= \varepsilon(\det(X_{ij})) = \det(\varepsilon(X_{ij})) = \det(\delta_{ij}) = 1 \\ &= \varepsilon(X). \end{aligned}$$

閉部分群スキーム. A を可換 k-代数とする. I を A のイデアルとするとき, $\mathrm{Sp}\, A/I$ は次の意味で $\mathrm{Sp}\, A$ のある部分集合関手と同一視できる:

$$\mathrm{Sp}\, A/I : R \mapsto \mathrm{Alg}_k(A/I, R) \simeq \{f \in \mathrm{Alg}_k(A, R) \mid f(I) = 0\} \subset \mathrm{Alg}_k(A, R).$$

代数幾何的な背景から, このような部分集合関手を $\mathrm{Sp}\,A$ の**閉部分スキーム** (**closed subscheme**) と呼ぶ. また一般に, $\mathbf{E}$ をアフィンスキーム, $A = k[\mathbf{E}]$ とするとき, $\mathbf{E}$ の部分集合関手のうち, 同型 $\mathbf{E} \simeq \mathrm{Sp}\,A$ を通じて $\mathrm{Sp}\,A$ の閉部分スキームと同型になるものをやはり $\mathbf{E}$ の閉部分スキームと呼ぶことにする.

さて, アフィン群スキームの閉部分スキームのうち,「部分群」になっているものを**閉部分群スキーム** (**closed subgroup scheme**) と呼びたい. $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $\mathbf{G}'$ を $\mathbf{G}$ の閉部分スキームとする. このとき $\mathbf{G}'$ が「部分群」になるというのは, すべての $R \in {}_k\mathcal{A}$ に対して $\mathbf{G}'(R)$ が $\mathbf{G}(R)$ の部分群になってることをいうわけだが, それを関手間射の可換図式で表してみることにしよう. $A = k[\mathbf{G}]$ とおき, I を $\mathbf{G}'$ に対応する A のイデアルとする. $\mathbf{G}'$ が $\mathbf{G}$ の「部分群」になるには

(a) 積で閉じている,

(b) 単位元を含む,

(c) 逆元をとる操作で閉じている,

という三つの条件を満たせばよい. まず (a) はどういう意味かというと, ある関手間射 $\mathrm{mult}' : \mathbf{G}' \times \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G} & \mathbf{G}' \arrow[l, "\text{inclusion}"'] \\
\mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[u, "\mathrm{mult}"] & \mathbf{G}' \times \mathbf{G}'. \arrow[l, "\text{inclusion}"] \arrow[u, "\mathrm{mult}'"']
\end{tikzcd}$$

これを代数の言葉で表すと, ある k-代数射 $\Delta' : A/I \to A/I \otimes_k A/I$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & A/I \arrow[d, "\Delta'"] \\
A \otimes_k A \arrow[r] & A/I \otimes_k A/I
\end{tikzcd}$$

が可換になること, となる. これをよく考えると, この条件はさらに

(a') $\Delta(I) \subset \mathrm{Ker}(A \otimes_k A \to A/I \otimes_k A/I)$

という I に関する条件と同値になることが分かる. 次に (b) はどういう意味かというと, ある関手間射 $\mathrm{unit}' : \{1\} \to \mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G} & \mathbf{G}' \arrow[l, "\text{inclusion}"'] \\
\{1\} \arrow[u, "\mathrm{unit}"] \arrow[r, equal] & \{1\}. \arrow[u, "\mathrm{unit}'"']
\end{tikzcd}$$

これを代数の言葉で表すと, ある k-代数射 $\varepsilon' : A/I \to k$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A/I \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
k \arrow[r, equal] & k
\end{tikzcd}$$

が可換になること, となる. 前と同様, これはさらに

(b') $\varepsilon(I)=0$

という条件と同値になることが分かる. (c) は, ある関手間射 $\mathrm{inv}':\mathbf{G}'\to\mathbf{G}'$ が存在して次が可換になることである:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{G}' \\
{\scriptstyle \mathrm{inv}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{inv}'} \\
\mathbf{G} & \xleftarrow{\text{inclusion}} & \mathbf{G}'.
\end{array}$$

これを代数の言葉で表すと, ある k-代数射 $S':A/I\to A/I$ が存在して

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & A/I \\
{\scriptstyle S}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S'} \\
A & \longrightarrow & A/I
\end{array}$$

が可換になること, となる. これを見れば (c) は

(c') $S(I)\subset I$

という条件と同値になることが分かる. (a')(b')(c') を満たすような I を A のホップイデアルと呼ぶ.

定義 2.4 (1) A を可換 k-ホップ代数とするとき, 次を満たす A のイデアル I を**ホップイデアル (Hopf ideal)** という:

$$\Delta(I)\subset\mathrm{Ker}(A\otimes_k A\to A/I\otimes_k A/I),\quad \varepsilon(I)=0,\quad S(I)\subset I.$$

I がホップイデアルのとき, A/I にも A から自然にホップ代数構造が誘導される (上の記号でいうと Δ',ε',S').

(2) $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A=k[\mathbf{G}]$ とする. A のホップイデアルに対応する $\mathbf{G}$ の閉部分スキームを $\mathbf{G}$ の**閉部分群スキーム**と呼ぶ.

演習 2.5 A,B を可換 k-ホップ代数, $\varphi:B\to A$ をホップ代数射とするとき, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は B のホップイデアルになることを示せ.

$\mathbf{G},\mathbf{H}$ をアフィン群スキーム, $A=k[\mathbf{G}]$, $B=k[\mathbf{H}]$ とする. また, $\Phi:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ をアフィン群スキームの準同型とし, これに対応するホップ代数射を $\varphi:B\to A$ とする. ここで φ が全射であったとすると, B は $A/\mathrm{Ker}\,\varphi$ と同型なホップ代数となる. すなわち $\mathbf{H}$ は $\mathrm{Ker}\,\varphi$ に対応する $\mathbf{G}$ の閉部分群スキームと同型なアフィン群スキームとなる. この意味で「閉埋め込み」を次のように定義する:

定義 2.6 全射ホップ代数射に対応するアフィン群スキームの準同型を**閉埋め込み** (closed embedding) と呼ぶ. ($\Phi : \mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{H}$ などと書いたりする.)

例えば unit : $\{1\} \to \mathbf{G}$ は最も基本的な閉埋め込みである. これに対応するホップイデアルを $A^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$ と書き, A の**添加イデアル** (augmentation ideal) という.

<u>**準同型の核.**</u> $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ をアフィン群スキームの準同型とするとき,

$$\operatorname{Ker} \Phi : R \mapsto \operatorname{Ker} \Phi_R$$

により定まる $\mathbf{G}$ の部分群関手 $\operatorname{Ker} \Phi$ を Φ の**核**と呼ぶ.

命題 2.7 $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ をアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$, $B = k[\mathbf{H}]$ とおく. $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ をアフィン群スキームの準同型, $\varphi : B \to A$ をそれに対応するホップ代数射とするとき, $\operatorname{Ker} \Phi$ はホップイデアル $A\varphi(B)^+ \subset A$ に対応する $\mathbf{G}$ の閉部分群スキームである.

[略証] $I = A\varphi(B)^+$ $(= A\varphi(B^+))$ とおく. 任意の可換 k-代数 R をとるとき, 任意の $f \in \operatorname{Alg}_k(A, R)$ に対し,

$$f \circ \varphi = u \circ \varepsilon \Leftrightarrow f(I) = 0$$

となることを示せばよい ($\operatorname{Alg}_k(B, R)$ の単位元が $u \circ \varepsilon$ であることに注意). ($\Rightarrow$) は明らか. ($\Leftarrow$) は $b \in B$ を $b = \varepsilon(b)1 + (b - \varepsilon(b)1)$ と書いてみれば分かる. □

例 2.8 $\Phi : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ を $g \mapsto g^2$ により定まる準同型とすると, これに対応する代数射は $\varphi : k[X, X^{-1}] \to k[X, X^{-1}]$, $X \mapsto X^2$ である. $k[X, X^{-1}]^+ = (X - 1)$ で, $\operatorname{Ker} \Phi$ は $k[X, X^{-1}]/(\varphi(X - 1)) = k[X, X^{-1}]/(X^2 - 1)$ が表現する $\boldsymbol{\mu}_2$ となる.

<u>**指標と群様元および原始元.**</u> $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ をアフィン群スキームとするとき, $\mathbf{G}$ から $\mathbf{H}$ への準同型全体を $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ と書く. $\mathbf{H}$ が可換のとき, $\Phi, \Psi \in \operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ に対し積 $\Phi\Psi \in \operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ を

$$(\Phi\Psi)_R : g \mapsto \Phi_R(g)\Psi_R(g) \quad (R \in {}_k\mathcal{A})$$

により定めれば, この積により $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ は群になる. 特に, $\operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ を $\mathbf{G}$ の**指標群**と呼び, $\mathbf{X}_{\mathbf{G}}$ と書く.

定義 2.9 一般に, ホップ代数 A の元 g が $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ $(\Rightarrow S(g) = g^{-1})$ を満たすとき, g を**群様元** (grouplike) と呼ぶ (これは $\Delta(g) = g \otimes g$ かつ g が A の可逆元であることと同値である). A の群様元全体 (以下 $\mathrm{g.l.}(A)$ と書くことにする) は $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(A) = A^\times$ の部分群をなす.

定理 2.10 $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とするとき, 群同型

$$\mathbf{X}_{\mathbf{G}} \simeq \mathrm{g.l.}(A)$$

が成立する.

[略証] $k[\mathbf{G}_{\mathrm{m}}] = k[X, X^{-1}]$ から A へのホップ代数射 φ と A の群様元 $\varphi(X)$ が対応する. $\square$

また, $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ への準同型全体 $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_{\mathrm{a}})$ は**加法的指標群**と呼ばれる.

定義 2.11 ホップ代数 A の元 p が $\Delta(p) = p \otimes 1 + 1 \otimes p$ を満たすとき, p を**原始元 (primitive)** と呼ぶ. A の原始元全体 (以下 $\mathrm{P}(A)$ と書くことにする) は $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}(A)$ の部分群をなす.

演習 2.12 $p \in A$ が原始元ならば, $\varepsilon(p) = 0$, $S(p) = -p$ が成り立つことを示せ.

定理 2.13 $\mathbf{G}$ をアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とするとき, 群同型

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_{\mathrm{a}}) \simeq \mathrm{P}(A)$$

が成立する.

[略証] $k[\mathbf{G}_{\mathrm{a}}] = k[Y]$ から A へのホップ代数射 φ と A の原始元 $\varphi(Y)$ が対応する. $\square$