

17 巾単写像についての問題

演習 17.1 V を $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間, $f: V \rightarrow V$ を巾単写像とするとき, ある $0 \neq v \in V$ が存在して $f(v) = v$ となることを示せ.

[コメント] これは前回の演習 16.1 を解いていればほとんど明らかです.

演習 17.2 V を $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間, $f_1, f_2: V \rightarrow V$ を二つの巾単写像とし, $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ であったと仮定する.

- (1) ある $0 \neq v \in V$ が存在して $f_1(v) = f_2(v) = v$ となることを示せ.
- (2) V の基底をうまくとれば, それに関する f_1, f_2 の表現行列がともに

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

という形になるようにできることを示せ.

[ヒント] (2) V の次元に関する帰納法. $\dim V = 1$ なら OK. $\dim V > 1$ のときは (1) の条件を満たす v をとって商空間 $V/\langle v \rangle$ を考える.