9 同時対角化可能性

演習 9.1 A, B を対角化可能な n 次複素正方行列とする．もしある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ がともに対角行列となるようにできるなら, A, B は**同時対角化可能**であるという．ここで, A, B が同時対角化可能であるための必要十分条件は $AB = BA$ であることをいくつかの小問に分けて証明していくことにしよう．まず, 必要性を示す:

(1) A, B が同時対角化可能ならば $AB = BA$ となることを示せ.

A の固有値を重複なくすべて並べて $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とし, $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_r}$ をそれぞれに対する A の固有空間とすると, 仮定より $\mathbb{C}^n$ は

$$\mathbb{C}^n = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_r}$$

と分解される (定理 7.3)．また, B の固有値も重複なくすべて並べて $\beta_1, \ldots, \beta_s$ とおき, それぞれに対する B の固有空間を $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_s}$ とする．以下 $AB = BA$ を仮定して, 次の (2)–(4) を示せ:

(2) $i = 1, \ldots, r$ について $BV_{\alpha_i} = \{B\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V_{\alpha_i}\} \subset V_{\alpha_i}$.

(3) $V_{ij} = V_{\alpha_i} \cap V_{\beta_j}$ $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s)$ とおくとき, $i = 1, \ldots, r$ について

$$V_{\alpha_i} = V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{is}.$$

(4) 上記の仮定のもと, A, B は同時対角化可能となる.

演習 9.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．A, B が対角化可能であることと $AB = BA$ を確認し, A, B を同時対角化せよ.

演習 9.3 (1) 任意の複素正方行列 A は二つのエルミート行列 B, C を用いて一意的に $A = B + \sqrt{-1}C$ と書けることを示せ.

(2) 上のように B, C を定めるとき, A が正規行列であることと B, C が同時対角化可能であることが同値であることを示せ.