6 グラム・シュミットの直交化法/固有値と固有空間

演習 6.1 計量ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ (内積は標準内積) の基底が次で与えられているとき, グラム・シュミットの方法により正規直交基底を作れ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 6.2 計量ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ (内積は標準内積) の基底が次で与えられているとき, グラム・シュミットの方法により正規直交基底を作れ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ -1 \end{pmatrix}$

演習 6.3 次の行列の固有値と固有空間を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$