

4 線形写像からなるベクトル空間

演習 4.1 U, V を有限次元ベクトル空間, $n = \dim U, m = \dim V$ とするとき, $\text{Hom}(U, V) \simeq M(m, n; K)$ となることを示せ.

演習 4.2 U, V を有限次元ベクトル空間とする. $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ に対し, $\varphi^* \in \text{Hom}(V^*, U^*)$ を

$$(\varphi^*(f))(u) = f(\varphi(u)) \quad (u \in U, f \in V^*)$$

により定める. U, V の基底を 1 組ずつとり, それらに関する φ の表現行列が A であるとき, それらの双対基底に関する φ^* の表現行列は tA (転置行列) となることを示せ.

演習 4.3 U, V をベクトル空間, W を U の部分空間とする.

(1) $I = \{f \in \text{Hom}(U, V) \mid f(w) = \mathbf{0} \ (\forall w \in W)\}$ とすると, I は $\text{Hom}(U, V)$ の部分空間になることを示せ.

(2) $I \simeq \text{Hom}(U/W, V)$ となることを示せ.