

## 4 線形写像からなるベクトル空間

演習 4.1  $U, V$  を有限次元ベクトル空間,  $n = \dim U, m = \dim V$  とするとき,  $\text{Hom}(U, V) \simeq M(m, n; K)$  となることを示せ.

演習 4.2  $U, V$  を有限次元ベクトル空間とする.  $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$  に対し,  $\varphi^* \in \text{Hom}(V^*, U^*)$  を

$$(\varphi^*(f))(u) = f(\varphi(u)) \quad (u \in U, f \in V^*)$$

により定める.  $U, V$  の基底を 1 組ずつとり, それらに関する  $\varphi$  の表現行列が  $A$  であるとき, それらの双対基底に関する  $\varphi^*$  の表現行列は  ${}^tA$  (転置行列) となることを示せ.

演習 4.3  $U, V$  をベクトル空間,  $W$  を  $U$  の部分空間とする.

(1)  $I = \{f \in \text{Hom}(U, V) \mid f(w) = \mathbf{0} \ (\forall w \in W)\}$  とすると,  $I$  は  $\text{Hom}(U, V)$  の部分空間になることを示せ.

(2)  $I \simeq \text{Hom}(U/W, V)$  となることを示せ.