

1 同値関係

演習 1.1 次で定義される二項関係について, 反射律, 対称律, 推移律がそれぞれ成立するかどうかを調べよ.

- (1) 整数 a, b に対し, $a \sim b : \Leftrightarrow a$ と b の両方が正か両方が負かのどちらか.
- (2) 整数 a, b に対し, $a \sim b : \Leftrightarrow a - b$ が 3 の倍数.
- (3) 整数 a, b に対し, $a \sim b : \Leftrightarrow a + b$ が 7 の倍数.
- (4) 整数 a, b に対し, $a \sim b : \Leftrightarrow a - b$ が 12 の約数.
- (5) 自然数 a, b に対し, $a \sim b : \Leftrightarrow a + b$ が合成数.
- (6) 整数全体 \mathbb{Z} における大小関係 $<$.
- (7) 整数全体 \mathbb{Z} における大小関係 \leq .
- (8) A, B を集合, $f : A \rightarrow B$ を写像とすると, $a, b \in A$ に対して $a \sim b : \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

演習 1.2 次に書いてある議論は実は間違っているのだが, どこが間違っているかを指摘せよ.

「同値関係の定義において反射律は不要である. 実際, S を空でない集合, \sim を対称律と推移律を満たす S 上の二項関係としよう. 任意の $x \in S$ に対し $x \sim y$ となる y をとれば, 対称律により $y \sim x$ となる. すると $x \sim y$ かつ $y \sim x$ だから推移律により $x \sim x$ となる. よって \sim は反射律も満たす. すなわち, 反射律は対称律と推移律を満たせば自動的に満たされるので, 定義に含める必要がない。」