10　線形写像と行列

演習 10.1 前回の演習 9.1 において線形写像となるのは下記の (1), (2) であった. これらの線形写像の, $M(2,\mathbb{R})$ の基底

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に関する表現行列を求めよ.

(1) $\varphi : A \mapsto {}^tA$

(2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のときの, $\varphi : A \mapsto CA - AC$.

演習 10.2 $V = \mathbb{R}[x]_2$ を実数係数の 1 変数多項式で次数が 2 以下のもの全体のなすベクトル空間とする. V から V への線形写像

$$\varphi : c_0 + c_1x + c_2x^2 \mapsto (c_0 + 2c_1 + c_2) + (-c_0 + 4c_1 + c_2)x + (2c_0 - 4c_1)x^2$$

について, 次に答えよ.

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = x$, $\boldsymbol{v}_3 = x^2$ に関する φ の表現行列 A を求めよ.
(2) $\boldsymbol{v}'_1 = 1 + x^2$, $\boldsymbol{v}'_2 = x - 2x^2$, $\boldsymbol{v}'_3 = 1 + x - 2x^2$ が V の基底になることを確かめよ.
(3) $(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)P$ となる基底の変換行列 P を求めよ.
(4) 基底 $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$, $\boldsymbol{v}'_3$ に関する φ の表現行列 B を求めよ.

[コメント] A と B との関係が $B = P^{-1}AP$ となることと, その理由をよく理解しておいてください.