

9 線形写像

演習 9.1 $V = M(2, \mathbb{R})$ を 2×2 の実正方行列全体のなすベクトル空間とする. 次で与えられる写像 $\varphi: V \rightarrow V$ が線形写像であるかどうかを (証明をつけて) 答えよ.

(1) $\varphi: A \mapsto {}^t A$ (ただし ${}^t A$ は A の転置行列)

(2) $\varphi: A \mapsto A^2$

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とおき,

$$\varphi: A \mapsto CA - AC$$

とする

(4) $\varphi: A \mapsto (\det A)E$ (ただし E は単位行列)

演習 9.2 上記の演習 9.1 において線形写像であると判断したものについて, $\text{Ker } \varphi$ と $\text{Im } \varphi$ の次元を求めよ.