

8 部分空間の和と直和

演習 8.1 K を実数体 \mathbb{R} または複素数体 \mathbb{C} とする. 以下で与えられる K^3 の部分ベクトル空間 W_1, W_2 について, ふたつの和 $W = W_1 + W_2$ の次元を求めよ. また, この和が直和 $W = W_1 \oplus W_2$ であるかどうかを調べよ.

$$(1) W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(2) W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(3) W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_3 = 0 \right\}$$

時間が余った人は次の問題も考えてみてください.

演習 8.2 $\mathbb{R}[x]_4$ を, 実数係数の 1 変数多項式で次数が 4 以下のもの全体のなすベクトル空間とする. 以下で与えられる $\mathbb{R}[x]_4$ の部分ベクトル空間 W_1, W_2 について, ふたつの和 $W = W_1 + W_2$ の次元を求めよ. また, この和が直和 $W = W_1 \oplus W_2$ であるかどうかを調べよ.

$$(1) W_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_4 \mid f''(x) = 0\}, \quad W_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_4 \mid xf''(x) - 2f'(x) = 0\}$$

$$(2) W_1 = \langle 1, x^2 \rangle, \quad W_2 = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_4 \mid \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \right\}$$