

6 ベクトル空間の基底 (その 2)

K を実数全体 \mathbb{R} または 複素数全体 \mathbb{C} とする.

演習 6.1 次で与えられる K^3 の部分空間 W_1, W_2, W_3 の基底を 1 組求めよ.

$$(1) W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(2) W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(3) W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

演習 6.2 V をベクトル空間とし, x_1, x_2, x_3 が V の基底であったとする. このとき, $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$ も V の基底になることを示せ.

時間が余った人は, 次も考えてみてください (ここから下は追加点対象の問題).

演習 6.3 上記の演習 6.1 の W_2 と W_3 の共通部分 $W_2 \cap W_3$ の基底を 1 組求めよ.

演習 6.4 $\mathbb{R}[X]_3$ を実数係数の 1 変数多項式で次数が 3 以下のもの全体のなす (実) ベクトル空間とし, $\mathbb{R}[X]_3$ の部分集合 W を

$$W = \{f(X) \in \mathbb{R}[X]_3 \mid X^2 f''(X) - X f'(X) = 0\}$$

により定める (ここで, f', f'' は f の 1 階および 2 階の導関数を表す).

- (1) W が $\mathbb{R}[X]_3$ の部分空間になることを示せ.
- (2) W の基底を 1 組求めよ.