4 ベクトル空間と部分空間

演習 4.1 $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数の全体がなす集合を $C(\mathbb{R})$ と書く. $f, g \in C(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ に対して, 和 $f+g \in C(\mathbb{R})$ とスカラー倍 $cf \in C(\mathbb{R})$ を, $x \in \mathbb{R}$ に対してそれぞれ

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

を対応させる関数として定義する. この和とスカラー倍に関して $C(\mathbb{R})$ がベクトル空間になることを定義に従って示せ (まず最初に, ゼロ元にあたる $C(\mathbb{R})$ の元を定義し, $C(\mathbb{R})$ が (VS1)〜(VS8) を満たすことを確かめよ).

演習 4.2 次の $C(\mathbb{R})$ の部分集合がそれぞれ部分ベクトル空間になるかどうかを判定せよ (理由も添えて).

(1) $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to 0} f(x) = 1\}$.

(2) $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to \infty} f(x) = 0\}$.

(3) $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ または $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty\}$.

(4) $\{f \in C(\mathbb{R}) \mid f$ は 有界 $\}$. (ここで, $f \in C(\mathbb{R})$ が有界であるとは, ある正の数 M が存在して ${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $|f(x)| < M$ となることをいう.)

(5) $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f$ は $\mathbb{R}$ で連続的微分可能 $\}$. (ここで, $f \in C(\mathbb{R})$ が連続的微分可能であるとは, f が微分可能かつ導関数 f' が連続関数であることをいう.)