3　線形結合と部分空間

演習 3.1 K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする. K^3 の部分空間について, 次を証明せよ.

(1) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(2) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(3) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

演習 3.2 $K = \mathbb{C}$ とする. 次の K^2 の部分集合 W が部分空間になるかどうかを理由とともに述べよ.

(1) A をある 2×2 の複素行列, α をある複素定数とするときの

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}.$$

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x_1 = \bar{x}_2 \right\}$ ($\bar{x}_2$ は x_2 の共役複素数).

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x_1 = \sqrt{-1}x_2 \right\}.$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください (ここから下は追加点対象の問題).

演習 3.3 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. ある線形写像 $f : K^n \to K^m$ があって, $m \times n$ 行列 A によって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in K^n$) と表されているとき, 次を証明せよ:

(1) f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n$.

(2) f が全射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = m$.