3　線形結合と部分空間 の解答例

演習 3.1 は, 教科書の定理 5.3 の下にある「注意」を使って示すのが一番簡単です:

注意. K^n の部分空間 W と, 数ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in W$ に対して, $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \rangle \subset W$ である.

演習 3.1 (1) まず,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (右辺), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (右辺)$$

より, (左辺) $\subset$ (右辺). また,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in (左辺), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in (左辺)$$

より, (左辺) $\supset$ (右辺).
　以上より, (左辺) $=$ (右辺). □

(2) まず, (1) より

$$(左辺) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset (右辺).$$

また,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in (左辺), \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (左辺)$$

より, (左辺) $\supset$ (右辺).
　以上より, (左辺) $=$ (右辺). □

(3) まず,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in (右辺), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in (右辺)$$

より, (左辺) $\subset$ (右辺). また,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\text{左辺}), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\text{左辺})$$

より, (左辺) $\supset$ (右辺).
以上より, (左辺) $=$ (右辺). $\square$

演習 3.2 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき, $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}$ だから,

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$

よって $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$. また,

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(c\boldsymbol{x})$$

より, $c\boldsymbol{x} \in W$. よって, W は部分空間.

※ $W \neq \{\mathbf{0}\}$ であれば, α は A の固有値です (W の $\mathbf{0}$ でない元が固有ベクトル). この意味で, W は α に関する A の <u>固有空間</u> と呼ばれます.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, $\boldsymbol{x} \in W$ であるが, $\sqrt{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \notin W$ だから, W は部分空間でない.

※ ここではとりあえず複素数で考えているので, 上記のように W は $\mathbb{C}^2$ の部分空間ではありませんが, スカラー倍を実数に限れば $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$, $c\boldsymbol{x} \in W$ ($c \in \mathbb{R}$) となるので, 部分空間と考えた人もいるかもしれません. 実際, この W は複素数体 $\mathbb{C}$ 上ではベクトル空間にはならないものの, 実数体 $\mathbb{R}$ 上ではベクトル空間になっています. このように,「スカラーを複素数でとっているか実数でとっているか」ということによってベクトル空間の概念が異なってくるので注意してください. (そういうわけで, 両者を「複素ベクトル空間」「実ベクトル空間」といって区別することがあります.)

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ とする. $x_1 = \sqrt{-1}x_2$, $y_1 = \sqrt{-1}y_2$ だから, $(x_1+y_1) = \sqrt{-1}(x_2+y_2)$ で, よって, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \in W$. また, $c \in \mathbb{C}$ に対し, $cx_1 = \sqrt{-1}cx_2$ となるから, $c\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} \in W$. 以上より, W は部分空間である.

演習 3.3 実は, これは教科書の 6.5 節まで (特に定理 6.14 と 6.15 を) 勉強すれば簡単に証明できるようになるのですが, 今まで習った範囲でも例えば次のように証明することができます:

(1) f が単射であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ だから (教科書の定理 5.2 (3)), この条件と $\mathrm{rank}\, A = n$ が同値であることを示せばよい.

rank A は A の列の数を超えることはないので $\mathrm{rank}\, A \leq n$ である. (教科書の定理 2.17 より) $\mathrm{rank}\, A = n$ のときは連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ただ一つであるから, $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$. 他方, $\mathrm{rank}\, A < n$ のときは連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ には $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解が存在するので $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\}$. 従って, $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A = n$. □

(2) K^m の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ と書く.

($\Rightarrow$) rank A は A の行の数を超えることはないので $\mathrm{rank}\, A \leq m$ である. f が全射であるとすると, ある $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in K^n$ が存在して $\boldsymbol{e}_1 = A\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m = A\boldsymbol{x}_m$ となる. これを行列の積で書けば,

$$E_m = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m) = (A\boldsymbol{x}_1, \ldots, A\boldsymbol{x}_m) = A(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m).$$

従って, $C = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ とおくと,

$$m = \mathrm{rank}\, E_m = \mathrm{rank}\, AC \leq \mathrm{rank}\, A \leq m.$$

(左側の不等式は教科書の系 2.11 による.) よって $\mathrm{rank}\, A = m$ を得る.

($\Leftarrow$) $\mathrm{rank}\, A = m$ とする. このとき, rank A は A の列の数を超えることはないので $m = \mathrm{rank}\, A \leq n$ である. また, ${}^tA$ は $n \times m$ 行列で $\mathrm{rank}\, {}^tA = \mathrm{rank}\, A = m$ だから, ${}^tA$ を行変形により簡約階段行列にすると $\begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix}$ という形 ($m = n$ のときは E_m) になるはずである. すなわち, ある n 次正則行列 B が存在して

$$B\,{}^tA = \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix}.$$

この両辺の転置行列をとれば, $A\,{}^tB = (E_m \;\; O)$. そこで ${}^tB$ の列ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ とすれば, $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{e}_m$ を得る. これは f が全射であることを意味する. 実際, 任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$ に対し,

$$f(y_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{x}_m) = A(y_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{x}_m) = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{y}.$$

□