2　線形写像と行列 (その２)/線形写像の像と核

演習 2.1 次で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について, $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ とをそれぞれ求めよ.

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ 　　(2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$

(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \end{pmatrix}$

演習 2.2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

によって定める. このとき, 次のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ が $\mathrm{Im}\, f$ に入っているかどうかを判定せよ. また, もし入っている場合, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$ となるような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ 　　(2) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 　　(3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

演習 2.3 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

(1) $\mathrm{id} : K^n \to K^n$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ を恒等写像 (identity map) という. この id は線形写像で, 単位行列 E によって表示されることを確認せよ.

(2) $f : K^n \to K^n$ を線形写像とし, 正方行列 A を用いて $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in K^n)$ と表されているとする. このとき,

$$f \text{ が全単射} \Leftrightarrow A \text{ が正則行列}$$

を示せ.

[ヒント] (2) $(\Rightarrow)$ もし f が全単射ならば逆写像 $f^{-1} : K^n \to K^n$ が存在する $(f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id})$. このとき f^{-1} も線形写像になることを示し, その表現行列が何になるかを考えよう.