

## 1 線形写像と行列

演習 1.1 次で定義される写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  または  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が線形写像であるかどうかを判定せよ (なるべく判定理由も添えて).

$$(1) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad (2) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{pmatrix}$$
$$(3) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

演習 1.2 上の演習 1.1 の写像のうち、線形写像になるものについて、それを表示する行列を求めよ.

演習 1.3 写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  と写像  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

によって与えられていたとする. このとき、 $f, g$  および  $f \circ g$  が線形写像になることを確認するとともに、それらを表示する行列を求めよ.

演習 1.4 (教科書の問題 5.2).

$K$  を  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  とする. 写像  $f: K^m \rightarrow K^l$  と写像  $g: K^n \rightarrow K^m$  がともに線形写像であるとき、合成写像  $f \circ g: K^n \rightarrow K^l$  も線形写像であることを示せ.