

1 線形写像と行列

演習 1.1 次で定義される写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ または $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が線形写像であるかどうかを判定せよ (なるべく判定理由も添えて).

$$(1) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad (2) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{pmatrix}$$
$$(3) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

演習 1.2 上の演習 1.1 の写像のうち、線形写像になるものについて、それを表示する行列を求めよ.

演習 1.3 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ と写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

によって与えられていたとする. このとき, f, g および $f \circ g$ が線形写像になることを確認するとともに, それらを表示する行列を求めよ.

演習 1.4 (教科書の問題 5.2).

K を \mathbb{R} または \mathbb{C} とする. 写像 $f: K^m \rightarrow K^l$ と写像 $g: K^n \rightarrow K^m$ がともに線形写像であるとき, 合成写像 $f \circ g: K^n \rightarrow K^l$ も線形写像であることを示せ.