

## 忠実平坦性とアフィン群スキームの商

天野勝利

(2012 年 2 月 3 日 ~ )

### 参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

この原稿は Part IV, Faithful Flatness and Quotients にあたる部分の講義ノートです。講義の残り時間数が少なくなってきたので、このパートはいくつか節を飛ばしたりしながら進むことにします。

### 13 忠実平坦性

#### 13.5 やり残していた証明

11.6 節の定理の証明でやり残していた部分を先に終わらせることにする<sup>1</sup>。

[定理 11.12 の証明つづき (必要性)]  $G$  を体  $k$  上の代数的アフィン群スキーム,  $A = k[G]$  とするとき,  $G$  が滑らかであることを仮定して  $A \otimes_k \bar{k}$  が被約であることを示す。

$\dim G = \text{rank } \Omega_A$  という条件は基礎体の拡大で変わらないから,  $k = \bar{k}$  としてよい。また  $G^\circ$  を  $G$  の単位連結成分とすると,  $k[G]$  が被約であることと  $k[G^\circ]$  が被約であることは同値なので, (十分性の証明のときと同様に)  $G = G^\circ$  と仮定してよい。

$I = A^+ (= \text{Ker } \varepsilon)$ ,  $n = \dim G (= \text{rank } \Omega_A = \dim_k I/I^2)$  とし,  $x_1, \dots, x_n \in I$  を,  $x_1 + I^2, \dots, x_n + I^2$  が  $I/I^2$  の  $k$ -基底になるようにとる。このとき,  $A_I$  の極大イデアル  $J = IA_I$  が  $x_1, \dots, x_n$  で生成されることを示そう。  $J_1 = \sum_{i=1}^n x_i A_I$ ,  $M = J/J_1$  とおくと,  $x_1, \dots, x_n$  のとり方により  $J \subset J_1 + J^2$  だから,  $JM = M$  である。よって, 中山の補題により  $M = 0$ , すなわち  $J = J_1$  を得る。

一方ここで, 環のクルール次元を  $\text{Kdim}$  で表すことにすると,

$$\text{Kdim } A_I = \text{Kdim}(A/\sqrt{(0)})_I = \dim G(k) = \text{Kdim } A/\sqrt{(0)} = \dim G = n.$$

従って,  $A_I$  が正則局所環, とくに整域であることが分かる。それにより  $A$  が被約であることが従う。  $\square$

<sup>1</sup>本の 13.5 節に書いてある証明ではなく, 本の 11.7 節で示唆されている (と私が思う) 証明を書いています。そのため, この節は 13 章というよりはむしろ 11 章に含まれるべき内容になりました。

### 13.1 忠実平坦性の定義

$A, B$  を可換環,  $A \rightarrow B$  を環準同型とし, それにより  $B$  を  $A$ -加群とみなす.

**定義 13.1**  $A \rightarrow B$  が平坦 (flat) (または  $B$  が平坦  $A$ -加群) であるとは, 任意の  $A$ -加群の単射準同型  $M \xrightarrow{u} N$  に対し  $M \otimes_A B \xrightarrow{u \otimes \text{id}_B} N \otimes_A B$  も単射になることをいう. これは  $- \otimes_A B$  が完全関手になることと同値である.

**注意 13.2**  $A \rightarrow B$  が平坦であるとし,  $v: M \rightarrow N$  を任意の  $A$ -加群準同型とする. このとき次の (1), (2) を覚えておくと便利である.

(1)  $0 \rightarrow (\text{Ker } v) \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \xrightarrow{v \otimes \text{id}_B} N \otimes_A B$  が完全列になるので,  $\text{Ker}(v \otimes \text{id}_B)$  と  $(\text{Ker } v) \otimes_A B$  とは同一視することができる.

(2)  $v \otimes \text{id}_B$  は  $M \otimes_A B \rightarrow (\text{Im } v) \otimes_A B \hookrightarrow N \otimes_A B$  と分解することができるので,  $\text{Im}(v \otimes \text{id}_B)$  は  $(\text{Im } v) \otimes_A B$  と同一視できる.

**命題 13.3**  $A \supset S$  を乗法的集合とすると,  $A \rightarrow S^{-1}A$  は平坦となる.

[証明]  $u: M \rightarrow N$  を任意の  $A$ -加群の単射準同型とする.  $M \otimes_A S^{-1}A = S^{-1}M$ ,  $N \otimes_A S^{-1}A = S^{-1}N$  に注意して,  $S^{-1}u: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$  の単射性を示す. 任意の  $m/s \in S^{-1}M$  ( $m \in M, s \in S$ ) について,  $S^{-1}u(m/s) = u(m)/s$  に注意すると,

$$S^{-1}u(m/s) = 0 \Rightarrow \exists s' \in S \text{ s.t. } u(s'm) = s'u(m) = 0 \Rightarrow s'm = 0 \Rightarrow m/s = 0.$$

よって  $S^{-1}u$  は単射である. □

**定理 13.4**  $A \rightarrow B$  は平坦であるとする. このとき次は同値:

- (i) 任意の  $A$ -加群  $M$  について,  $M \rightarrow M \otimes_A B, m \mapsto m \otimes 1$  は単射.
- (ii) 任意の  $A$ -加群  $M$  について,  $M \otimes_A B = 0 \Rightarrow M = 0$ .
- (iii) 任意の  $A$ -加群準同型  $M \xrightarrow{u} N$  について,  $M \otimes_A B \xrightarrow{u \otimes \text{id}_B} N \otimes_A B$  が単射ならば, もとの  $M \xrightarrow{u} N$  も単射.
- (iv) 任意の  $A$ -加群準同型の列  $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$  について,  $L \otimes_A B \xrightarrow{u \otimes \text{id}_B} M \otimes_A B \xrightarrow{v \otimes \text{id}_B} N \otimes_A B$  が完全列ならば, もとの  $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$  も完全列.

[証明] ((i)  $\Rightarrow$  (ii)) 明らか.

((ii)  $\Rightarrow$  (iii)) もし  $(\text{Ker } u) \otimes_A B = \text{Ker}(u \otimes \text{id}_B) = 0$  ならば, (ii) より  $\text{Ker } u = 0$  となり,  $M \xrightarrow{u} N$  も単射.

((iii)  $\Rightarrow$  (i))  $\varphi: M \otimes_A B \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_A B$  を  $\varphi(m \otimes b) = m \otimes 1 \otimes b$  により定め,  $\psi: (M \otimes_A B) \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B$  を  $\psi(m \otimes a \otimes b) = m \otimes ab$  により定めると  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  となるので,  $\varphi$  は単射である. よって, (iii) で  $N = M \otimes_A B$  とすれば (i) を得る.

((iv)  $\Rightarrow$  (iii)) 明らか.

((i)(ii)  $\Rightarrow$  (iv)) まず, 次の可換図式の縦射 (特に一番右) が単射であることから  $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$  であることがいえる:

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L \otimes_A B & \xrightarrow{u \otimes \text{id}_B} & M \otimes_A B & \xrightarrow{v \otimes \text{id}_B} & N \otimes_A B \quad (\text{exact}). \end{array}$$

また, 完全列  $0 \rightarrow \text{Im } u \rightarrow \text{Ker } v \rightarrow \text{Ker } v / \text{Im } u \rightarrow 0$  に  $- \otimes_A B$  をかけて得られる完全列

$$0 \rightarrow (\text{Im } u) \otimes_A B \rightarrow (\text{Ker } v) \otimes_A B \rightarrow (\text{Ker } v / \text{Im } u) \otimes_A B \rightarrow 0$$

により,

$$(\text{Ker } v / \text{Im } u) \otimes_A B \simeq ((\text{Ker } v) \otimes_A B) / ((\text{Im } u) \otimes_A B) = \text{Ker}(v \otimes \text{id}_B) / \text{Im}(u \otimes \text{id}_B) = 0.$$

よって  $\text{Ker } v / \text{Im } u = 0$ , すなわち  $\text{Ker } v = \text{Im } u$  を得る.  $\square$

**定義 13.5** 上の定理の条件 (平坦性および (i)–(iv)) を満たす  $A \rightarrow B$  は忠実平坦 (faithfully flat) であるという. このとき特に, (i) で  $M = A$  とすれば,  $A \rightarrow B$  は単射であることが分かる. だから基本的に,  $B$  が  $A$  の拡大環である場合しかこれは起こり得ない.

**命題 13.6**  $A \rightarrow B$  が忠実平坦のとき,  $I$  を  $A$  のイデアルとすると,  $I = A \cap IB$ .

[証明]  $A \rightarrow A/I \hookrightarrow (A/I) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B/IB$  の核を考えれば良い.  $\square$

一般の  $A$ -加群についても平坦性と忠実平坦性の定義を拡張しておこう:

**定義 13.7**  $M$  を  $A$ -加群とする.

(1)  $- \otimes_A M$  が完全関手のとき,  $M$  は平坦であるという.

(2) 任意の  $A$ -加群準同型の列  $N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} N_3$  に対し

$$N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} N_3 \text{ が完全列} \Leftrightarrow N_1 \otimes_A M \xrightarrow{u \otimes \text{id}} N_2 \otimes_A M \xrightarrow{v \otimes \text{id}} N_3 \otimes_A M \text{ が完全列}$$

が成り立つとき,  $M$  は忠実平坦であるという.

**命題 13.8** (1)  $A \xrightarrow{\text{id}} A$  は忠実平坦.

(2)  $M_i$  ( $i \in \Lambda$ ) を忠実平坦な  $A$ -加群の族とすると, それらの直和  $M = \bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$  も忠実平坦である.

(3) 自由  $A$ -加群は忠実平坦である. とくに  $A$  が体のときは, 任意の  $A$ -加群が忠実平坦となる.

[証明] (1) 任意の  $A$ -加群  $N$  に対して  $N \otimes_A A \simeq A$  となることから明らか.

(2) 任意の  $A$ -加群準同型の列  $N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} N_3$  に対し,

$$\begin{aligned}
 & N_1 \xrightarrow{u} N_2 \xrightarrow{v} N_3 \text{ が完全列} \\
 \Leftrightarrow & N_1 \otimes_A M_i \xrightarrow{u \otimes \text{id}} N_2 \otimes_A M_i \xrightarrow{v \otimes \text{id}} N_3 \otimes_A M_i \text{ が完全列 } (\forall i \in \Lambda) \\
 \Leftrightarrow & \bigoplus_{i \in \Lambda} (N_1 \otimes_A M_i) \xrightarrow{\oplus u \otimes \text{id}} \bigoplus_{i \in \Lambda} (N_2 \otimes_A M_i) \xrightarrow{\oplus v \otimes \text{id}} \bigoplus_{i \in \Lambda} (N_3 \otimes_A M_i) \text{ が完全列} \\
 \Leftrightarrow & N_1 \otimes_A M \xrightarrow{u \otimes \text{id}} N_2 \otimes_A M \xrightarrow{v \otimes \text{id}} N_3 \otimes_A M \text{ が完全列.}
 \end{aligned}$$

(3) は (1)(2) により直ちに従う. □

一般に,  $M, N$  を  $A$ -加群,  $\alpha, \beta : M \rightarrow N$  を 2 つの  $A$ -加群準同型とすると,

$$\text{Ker}(M \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} N) := \{m \in M \mid \alpha(m) - \beta(m) = 0\}$$

を  $M \rightrightarrows N$  の差核 (difference kernel) と呼ぶ. また, ある単射準同型  $L \rightarrow M$  の像が  $M \rightrightarrows N$  の差核と等しいときに

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightrightarrows N \quad (\text{exact})$$

などと書く.

**定理 13.9**  $A \rightarrow B$  が忠実平坦であったとする.  $M$  を  $A$ -加群とし,  $\alpha, \beta : M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B$  を  $\alpha(m \otimes b) = m \otimes b \otimes 1, \beta(m \otimes b) = m \otimes 1 \otimes b$  により定める. このとき,

$$0 \rightarrow M \rightarrow M \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} M \otimes_A B \otimes_A B \quad (\text{exact}).$$

[証明]  $A \rightarrow B$  が忠実平坦なので, 上記に  $- \otimes_A B$  をかけた

$$\begin{aligned}
 0 & \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_A B \rightrightarrows (M \otimes_A B \otimes_A B) \otimes_A B \\
 & \quad m \otimes b \mapsto m \otimes 1 \otimes b
 \end{aligned} \tag{13.1}$$

が exact になることを示せば定理の結論を得る.

$\psi : M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B$  を  $\psi(m \otimes b \otimes c \otimes d) = m \otimes b \otimes cd$  により定める. 任意の  $\sum_i m_i \otimes b_i \otimes c_i \in M \otimes_A B \otimes_A B$  をとる. もし  $\sum_i m_i \otimes b_i \otimes 1 \otimes c_i = \sum_i m_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes c_i$  であったなら,

$$\sum_i m_i \otimes b_i \otimes c_i = \psi\left(\sum_i m_i \otimes b_i \otimes 1 \otimes c_i\right) = \psi\left(\sum_i m_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes c_i\right) = \sum_i m_i \otimes 1 \otimes b_i c_i$$

となるが, これは (13.1) における  $M \otimes_A B$  からの像に入っている. □

## 14 ホップ代数の忠実平坦性

### 14.1 ホップ代数の忠実平坦性

定理 14.1  $B$  を体  $k$  上の可換ホップ代数とし,  $A$  を  $B$  の部分ホップ代数とすると,  $A \hookrightarrow B$  は忠実平坦である.

### 14.3 簡単な応用

系 14.2  $B$  を体  $k$  上のホップ代数かつ整域,  $A$  を  $B$  の部分ホップ代数とする.  $L$  を  $B$  の商体,  $K$  を  $A$  の商体 ( $\subset L$ ) とすると,  $B \cap K = A$  となる. とくに, もし  $K = L$  なら  $A = B$  である.

[証明]  $a/c \in B \cap K$  ( $a, c \in A$ ) とすると, 定理 14.1 と命題 13.6 により  $a \in cB \cap A = cA$  だから,  $a/c \in A$ .  $\square$

系 14.3  $B$  を体  $k$  上のホップ代数かつ整域とする. このとき,  $B$  が有限生成  $k$ -代数  $\Leftrightarrow B$  の商体が  $k$  上有限生成な体.

[証明]  $(\Rightarrow)$  明らか.  $(\Leftarrow)$  ( $B$  の商体)  $= k(x_1, \dots, x_n)$  となる  $x_1, \dots, x_n \in B$  をとる. すると有限性定理 (3.3 節) により,  $x_1, \dots, x_n$  を含むある有限生成な  $B$  の部分ホップ代数  $A$  が存在する. このとき  $A$  の商体と  $B$  の商体は一致するから, 上の系により  $A = B$  を得る.  $\square$

系 14.4  $B$  を体  $k$  上の有限生成可換ホップ代数とし,  $\mathbf{F} = \text{Spec } B$  は滑らかであったとする. このとき  $B$  の任意の部分ホップ代数は有限生成である.

[証明]  $A$  を  $B$  の部分ホップ代数,  $\mathbf{G} = \text{Spec } A$  とする.  $A \otimes_k \bar{k}$  が有限生成であることを示せば十分なので,  $k = \bar{k}$  と仮定してよい. ( $A \otimes_k \bar{k}$  が有限生成のとき, その生成元の  $A$ -成分たちで生成される  $A$  の部分代数を  $A_1$  とすれば,  $A_1 \otimes_k \bar{k} = A \otimes_k \bar{k}$  より  $A_1 = A$  を得る.)

$\pi_0(A) \subset \pi_0(B)$  だから,  $\pi_0(A)$  は有限次元  $k$ -代数である. よって,  $A = k[\mathbf{G}]$  は  $k[\mathbf{G}^\circ]$  の有限個の直積と同型なので,  $k[\mathbf{G}^\circ]$  が有限生成であることを示せばよい. 仮定より  $k[\mathbf{F}^\circ]$  は整域かつ有限生成だから, その商体 ( $L$  とする) は  $k$  上有限生成な体となる. すると,  $k[\mathbf{G}^\circ]$  は  $k[\mathbf{F}^\circ]$  の部分ホップ代数とみなせるので,  $k[\mathbf{G}^\circ]$  の商体も ( $L/k$  の中間体なので)  $k$  上有限生成な体となる<sup>2</sup>. よって上の系により  $k[\mathbf{G}^\circ]$  が有限生成  $k$ -代数であることが分かる.  $\square$

<sup>2</sup>例えば, 藤崎源二郎著「体とガロア理論」(岩波書店) の定理 4.9 を参照

## 15 商射

### 15.1 商射

定義 15.1 体  $k$  上のアフィン群スキームの準同型  $F \rightarrow G$  が商射 (quotient map) であるとは, 対応するホップ代数射  $k[G] \rightarrow k[F]$  が単射であることをいう.

定理 15.2 (代数的行列群の場合)  $F, G$  を体  $k$  上の代数的行列群,  $F = \text{Spec } k[F]$ ,  $G = \text{Spec } k[G]$  とし,  $\Phi : F \rightarrow G$  をアフィン群スキームの準同型とする. このとき,

$$\Phi \text{ が商射} \Leftrightarrow \Phi_k : F \rightarrow G \text{ の像が } G \text{ の中で稠密.}$$

[証明]  $\varphi : k[G] \rightarrow k[F]$  を  $\Phi$  に対応するホップ代数射とすると,  $\text{Im } \Phi_k$  の  $G$  におけるザリスキー閉包に対応する  $k[G]$  のイデアルは  $\text{Ker } \varphi$  と一致する. よって, 二つの条件はいずれも  $\text{Ker } \varphi = 0$  と同値である.  $\square$

定理 15.3 (準同型の分解)  $\Phi : F \rightarrow G$  を体  $k$  上のアフィン群スキームの準同型とする. このとき,  $G$  のある閉部分群スキーム  $H$  が存在して  $\Phi$  は  $F \xrightarrow{\text{商射}} H \hookrightarrow G$  と分解される.

[証明]  $\varphi : k[G] \rightarrow k[F]$  を  $\Phi$  に対応するホップ代数射,  $H$  を  $\text{Ker } \varphi$  に対応する  $G$  の閉部分群スキームとすれば,  $\varphi$  は  $k[G] \rightarrow k[H] \hookrightarrow k[F]$  と分解される.  $\square$

命題 15.4 (簡単な性質)  $F \rightarrow G$  が体  $k$  上のアフィン群スキームの商射であるとき, 次が成り立つ.

- (1)  $F$  が連結ならば,  $G$  も連結.
- (2)  $F$  が代数的かつ滑らかならば,  $G$  も代数的かつ滑らかである.
- (3)  $F$  が代数的行列群に由来するならば,  $G$  もそうである.
- (4)  $F$  がベキ単 (unipotent) ならば,  $G$  もベキ単である.

[証明] (1)  $\pi_0(k[G]) \hookrightarrow \pi_0(k[F]) = k$  より  $\pi_0(k[G]) = k$ .

(2) 系 14.4 の証明において,  $k[G] \otimes_k \bar{k}$  は有限生成かつ被約.

(3)  $k[G]$  が有限生成であることは系 11.13 と (2) による. あとは  $k[G]$  が 4.5 節の定理の条件を満たすことを示せばよい.  $k[G] \subset k[F]$  とみなすとき, 任意の  $h \in \text{Alg}_k(k[F], k)$  に対し,  $k[G] \hookrightarrow k[F] \xrightarrow{h} k$  の核は  $k[G] \cap \text{Ker } h$  だから,

$$\bigcap_{g \in \text{Alg}_k(k[G], k)} \text{Ker } g \subset \bigcap_{h \in \text{Alg}_k(k[F], k)} (k[G] \cap \text{Ker } h) = k[G] \cap \left( \bigcap_{h \in \text{Alg}_k(k[F], k)} \text{Ker } h \right) = 0.$$

(4)  $k[F]$  が coconnected (i.e. pointed irreducible) だから, その部分ホップ代数である  $k[G]$  も coconnected である. (8.3 節を参照.)  $\square$

## 15.2 代数閉体上における代数的行列群の場合

定理 15.5  $k$  を代数閉体,  $F, G$  を  $k$  上の代数的行列群,  $\mathbf{F} = \text{Spec } k[F]$ ,  $\mathbf{G} = \text{Spec } k[G]$  とし,  $\Phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$  をアフィン群スキームの準同型とする. このとき,

$$\Phi \text{ が商射} \Leftrightarrow \Phi_k: F \rightarrow G \text{ が全射.}$$

[証明] ( $\Leftarrow$ ) は定理 15.2 による. 以下, ( $\Rightarrow$ ) を示す.  $A = k[G]$ ,  $B = k[F]$  とおき,  $A \subset B$  とみなしたとき,  $A$  の任意の極大イデアル  $P$  に対し, ある  $B$  の極大イデアル  $Q$  が存在して  $P = Q \cap A$  となることを示せばよい. まず, 定理 14.1 より,  $A \hookrightarrow B$  は忠実平坦である. すると, 命題 13.6 により,  $PB \cap A = P$ . とくに  $PB \neq B$  である. そこで,  $Q$  を  $PB$  を含む  $B$  の極大イデアルとする. このとき,  $A \hookrightarrow B \rightarrow B/Q \xrightarrow{\sim} k$  の核は  $P$  を含む極大イデアルとなるから, それは当然  $P$  と一致する. よって  $P = Q \cap A$  を得る.  $\square$

系 15.6  $k$  を代数閉体,  $\Phi: F \rightarrow G$  を  $k$  上の代数的行列群の準同型とする. このとき  $\text{Im } \Phi$  は  $G$  の閉部分群である.

[証明] 定理 15.3 と上の定理による.  $\square$

$k$  が代数閉体でないときは上の定理の  $\Rightarrow$  は一般には成り立たない:

例 15.7  $k$  を無限体とする.  $\Phi: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$  を  $\lambda \mapsto \lambda^n$  により定まる準同型とすると, これは商射となる. しかし,  $k$  が代数閉体でないときは  $\Phi_k: k^\times \rightarrow k^\times$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^n$  が全射であるとは限らない.

ファイバー積・準同型の核 (復習). ここで, 次の節に入るまえに, ファイバー積や準同型の核について復習しておこう.

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  を体  $k$  上のアフィン群スキーム,  $A = k[\mathbf{G}]$ ,  $B = k[\mathbf{F}]$ ,  $C = k[\mathbf{H}]$  とする.  $\Phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ ,  $\Psi: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$  をアフィン群スキームの準同型とし, これらに対応するホップ代数射をそれぞれ  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $\psi: A \rightarrow C$  とする. このとき群関手  $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{H}$  を

$$(\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{H})(R) = \{(f, h) \in \mathbf{F}(R) \times \mathbf{H}(R) \mid \Phi_R(f) = \Psi_R(h)\}$$

により定めると, これは  $B_\varphi \otimes_A \psi C$  を座標環とするアフィン群スキームとなる:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{H})(R) &\xrightarrow{\sim} \text{Alg}_k(B_\varphi \otimes_A \psi C, R) \\ (f, h) &\mapsto [a \otimes b \mapsto f(a)h(b)]. \end{aligned}$$

これをファイバー積という. とくに  $\mathbf{H} = \{1\}$ ,  $\Psi: \{1\} \hookrightarrow \mathbf{G}$  (つまり  $\psi = \varepsilon: A \rightarrow k$ ) のとき,  $(\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \{1\})(R) \simeq \{f \in \mathbf{F}(R) \mid \Phi_R(f) = 1\} = \text{Ker } \Phi_R \subset \mathbf{F}(R)$  だから,  $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \{1\}$

は  $F$  の閉正規部分群スキームとなる. これを  $\text{Ker } \Phi$  と書き,  $\Phi$  の核と呼ぶ. また, 完全列  $0 \rightarrow A^+ \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} k \rightarrow 0$  に  $B_\varphi \otimes_A -$  をかければ, 完全列  $B_\varphi(A^+) \rightarrow B \rightarrow B_\varphi \otimes_A \varepsilon k \rightarrow 0$  を得るので,  $\text{Ker } \Phi$  の座標環は  $B_\varphi \otimes_A \varepsilon k \simeq B/(B_\varphi(A^+))$  となる. 従って,  $\text{Ker } \Phi$  に対応する  $B$  のホップイデアルは  $B_\varphi(A^+) = B_\varphi(A)^+$  である.

### 15.3 単射準同型と閉埋め込みが一致すること

定理 15.8  $\Phi : F \rightarrow G$  を体  $k$  上のアフィン群スキームの準同型とする. もし  $\text{Ker } \Phi = \{1\}$  なら  $\Phi$  は閉埋め込みである.

[証明] 定理 15.3 より,  $\Phi$  が商射の場合に示せば十分である. よって  $k[G] \subset k[F]$  と仮定してよい.  $A = k[G]$ ,  $B = k[F]$  とおく.  $\alpha, \beta \in \mathbf{F}(B \otimes_A B)$  を  $\alpha = [b \mapsto b \otimes 1]$  と  $\beta = [b \mapsto 1 \otimes b]$  により定める. 両者の  $G(B \otimes_A B)$  における像は一致するので, もし  $\text{Ker } \Phi = \{1\}$  なら  $\alpha = \beta$  である. つまり  $B = \text{Ker}(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$  となる. 一方, 定理 14.1 より  $A \hookrightarrow B$  は忠実平坦だから, 定理 13.9 で  $M = A$  とすれば  $\text{Ker}(B \rightrightarrows B \otimes_A B) = A$ . 従って  $A = B$ , すなわち  $G = F$  がいえる.  $\square$

この定理は「群」準同型でないと成立しないので注意が必要である. 例えば自明な射  $G_m \rightarrow G_a$  はアフィンスキームの準同型で, 明らかに単射だが, 閉埋め込みではない.

また, アフィン代数群 (ないし代数的行列群) の文脈では上記の定理は一般には成り立たない. 例えば群同型となるアフィン代数群の射であっても, アフィン群スキームの意味では非自明な核をもつことがある:

例 15.9  $k$  を標数  $p > 0$  の代数閉体とする.  $\Phi : G_a \rightarrow G_a$  を  $\lambda \mapsto \lambda^p$  によって定めると, これはアフィン群スキームの準同型となる. このとき  $\Phi_k$  は  $G_a(k)$  から  $G_a(k)$  への群同型写像になるが, 代数群の同型写像にはならない. この事実は代数群の文脈では「逆写像が多項式写像にならないから」という風にとらえるしかないが, スキームの文脈で考えると  $\text{Ker } \Phi = \alpha_p \neq \{1\}$  だから, ある意味で単射性が成り立っていないことを理解することができる.

### 15.4 商射の普遍性

定理 15.10  $\Phi : F \rightarrow G$  を商射,  $N = \text{Ker } \Phi$  とする. このとき  $N$  で消える任意の準同型  $F \rightarrow H$  は  $G$  を経由する.

[証明]  $k[G] \subset k[F]$  とみなす. 任意の可換  $k$ -代数  $R$  をとるとき, 任意の  $(x, y) \in (F \times_G F)(R)$  について,  $xy^{-1} \in N(R)$  だから,  $x$  と  $y$  の  $F(R) \rightarrow H(R)$  における像は等しい. よって, 二つの射影  $F \times_G F \rightrightarrows F$  は  $F \rightarrow H$  と合成させると一致する. これはつまり, 二つのホップ代数射  $k[H] \rightarrow k[F] \rightrightarrows k[F] \otimes_{k[G]} k[F]$  が一致することを意味



する. 一方, 定理 14.1 と定理 13.9 により  $\text{Ker}(k[\mathbf{F}] \rightrightarrows k[\mathbf{F}] \otimes_{k[\mathbf{G}]} k[\mathbf{F}]) = k[\mathbf{G}]$  だから,  $k[\mathbf{H}] \rightarrow k[\mathbf{F}]$  の像が  $k[\mathbf{G}]$  に含まれていることが分かる.  $\square$

系 15.11 二つの商射  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}'$  の核が一致するならば,  $\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}'$ .

[証明] 上の証明により,  $k[\mathbf{G}] \hookrightarrow k[\mathbf{F}]$  の像と  $k[\mathbf{G}'] \hookrightarrow k[\mathbf{F}]$  の像が一致する.  $\square$

## 16 商の構成