2011 年度 代数学 II

アフィン群スキームのリー環

天野勝利

(2012 年 1 月 12 日〜1 月 27 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

この原稿は Part III, The Infinitesimal Theory の Ch. 12 にあたる部分の講義ノートです.

12.1 左不変な線形作用素とリー環の定義

k を体とする. 可換 k-ホップ代数 A に対して, “左不変” な導分 (derivation) $A \to A$ 全体を $\operatorname{Spec} A$ のリー環として定義したい. まず, “左不変” な線形作用素をどう定義するかということをみるため, 代数的行列群の場合を考えてみることにしよう. S を代数的行列群とし, その座標環を $A = k[S] = \{f : S \to k \ \ 多項式関数\}$ とおく. そして $g \in S$ による左変換 $T_g : A \to A$, $(T_g f)(x) = f(gx)$ $(f \in A,\ x \in S)$ を考える. S と $\mathrm{Alg}_k(A, k)$ を同一視して $g, x \in \mathrm{Alg}_k(A, k)$ とみなす $(g : f \mapsto f(g),\ x : f \mapsto f(x))$ と, gx は代数射 $A \to k$ としては

$$gx : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_k A \xrightarrow{(g,\mathrm{id})} A \xrightarrow{x} k, \quad f \mapsto f(gx) = (T_g f)(x)$$

(ここで, Δ は A の余積, $(g, \mathrm{id}) : f \otimes h \mapsto f(g)h$) となるので, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "T_g"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "(g,\mathrm{id})"] & A \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "x"'] & k \arrow[r, equal] & k \end{tikzcd}$$

これが任意の $x \in \mathrm{Alg}_k(A, k)$ について成立するので,

$$T_g f - ((g, \mathrm{id}) \circ \Delta)(f) \subset \bigcap_{x \in \mathrm{Alg}_k(A,k)} \operatorname{Ker} x = 0 \quad ({}^\forall f \in A).$$

すなわち $T_g = (g, \mathrm{id}) \circ \Delta$ を得る. (つまり, この T_g は 11.4 節の定理の証明で使ったものと同じであることがいえた.)

ここで, k-線形写像 $T : A \to A$ に対し,

$$T \text{ が}\textbf{左不変} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T \circ T_g = T_g \circ T \ ({}^\forall g \in S)$$

と定義する.

命題 12.1 $T : A \to A$ を k-線形写像とするとき, T が左不変 $\Leftrightarrow \Delta \circ T = (\mathrm{id} \otimes T) \circ \Delta$.

[証明] 任意の $g \in S$ に対し, $T_g = (g, \mathrm{id}) \circ \Delta$ であったから,

$$T \text{ が左不変} \Leftrightarrow (g, \mathrm{id}) \circ \Delta \circ T = T \circ (g, \mathrm{id}) \circ \Delta = (g, \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes T) \circ \Delta \quad ({}^\forall g \in S).$$

よって, あとは

$$\bigcap_{g \in S} \mathrm{Ker}(g, \mathrm{id}) = 0$$

を示せばよい. $A \otimes_k A$ の任意の元 w を $w = \sum_{i=1}^n f_i \otimes h_i$ ($h_1, \ldots, h_n$ は k-線形独立) と書くとき,

$$\begin{aligned} (g, \mathrm{id})(w) = 0 \quad ({}^\forall g \in S) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n f_i(g) h_i = 0 \quad ({}^\forall g \in S) \\ \Leftrightarrow \quad f_i(g) = 0 \quad ({}^\forall g \in S,\ i = 1, \ldots, n) \quad &\Leftrightarrow \quad f_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \Leftrightarrow \quad w = 0. \end{aligned}$$

□

これで, 一般の可換ホップ代数について "左不変" な線形作用素を定義する手がかりが見つかった.

定義 12.2 一般に, k を体, A を可換 k-ホップ代数とする. k-線形作用素 $T : A \to A$ が**左不変**とは, $\Delta \circ T = (\mathrm{id} \otimes T) \circ \Delta$ を満たすことをいう.

この左不変性は写像の合成や k-線形結合でも保たれる. 実際, T, U が左不変な線形作用素ならば,

$$\Delta \circ T \circ U = (\mathrm{id} \otimes T) \circ \Delta \circ U = (\mathrm{id} \otimes T) \circ (\mathrm{id} \otimes U) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes (T \circ U)) \circ \Delta$$

だから $T \circ U$ も左不変であるし, $a, b \in k$ に対し $aT + bU$ も左不変である.

定義 12.3 $\mathbf{G}$ を体 k 上のアフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. このとき,

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{G}) := \{D \in \mathrm{Der}_k(A, A) \mid \Delta \circ D = (\mathrm{id} \otimes D) \circ \Delta\}$$

を $\mathbf{G}$ の**リー環**という.

演習 12.4 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ が実際に, ブラケット積 $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ によって k 上のリー環になっていることを確かめよ.

k の標数が $p > 0$ のときは, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ はさらに次で定義する意味で**制限リー環 (restricted Lie algebra)** (または p-**リー環**) となる.

定義 12.5 k を標数 $p > 0$ の体, L を k 上のリー環とする. L の普遍包絡環 $U(L)$ に独立変数 ξ を添加した環 $U(L)[\xi]$ (ξ と $U(L)$ の元は可換とする) において

$$(\xi X + Y)^p = \xi^p X^p + Y^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(X, Y)\xi^i \quad ({}^\forall X, Y \in L)$$

を満たす $s_i : L \times L \to U(L)$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ をとる. L が**制限リー環 (restricted Lie algebra)** であるとは, ある写像 $L \to L$, $x \mapsto x^{[p]}$ があって,

(i) $(cx)^{[p]} = c^p x^{[p]}$ (${}^\forall c \in k$, ${}^\forall x \in L$),

(ii) $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$ (${}^\forall x, y \in L$),

(iii) $(\mathrm{ad}\, x)^p(y) = (\mathrm{ad}\, x^{[p]})(y)$ (${}^\forall x, y \in L$)

を満たすことをいう. このとき $x \mapsto x^{[p]}$ のことを p-**演算 (p-operation)** と呼ぶことがある.

命題 12.6 k を標数 $p > 0$ の体, $\mathbf{G}$ を k 上のアフィン群スキームとするとき, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ は p 冪写像 $D \mapsto D^p$ を p-演算とする制限リー環である.

[証明] $D \in \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$, $a, b \in k[\mathbf{G}]$ に対し,

$$D^p(ab) = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} D^i(a) D^{p-i}(b) = aD^p(b) + D^p(a)b$$

より, $D^p \in \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$. よって $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ は $D \mapsto D^p$ で閉じている.

(i), (ii) は定義より明らか. また, n に関する帰納法で

$$(\mathrm{ad}\, D_1)^n(D_2) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-i} D_1^i D_2 D_1^{n-i} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

がいえるので, 上式で $n = p$ とすれば

$$(\mathrm{ad}\, D_1)^p(D_2) = D_1 D_2 + (-1)^p D_2 D_1^p = (\mathrm{ad}\, D_1^p)(D_2)$$

となり, (iii) を得る. □

12.2 リー環の計算

定理 12.7 $\mathbf{G}$ を体 k 上のアフィン群スキーム, $k[\tau]=k[T]/(T^2)$ (τ は T の像とする. つまり $\tau^2=0$) とする. このとき, $\rho: k[\tau]\to k$ を $\rho(a+b\tau)=a$ により定めると,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lie}(\mathbf{G}) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \{\sigma\in\mathbf{G}(k[\tau]) \mid \rho\circ\sigma=\varepsilon\} \\ D=(\mathrm{id}\otimes d)\circ\Delta & \leftrightarrow & \varepsilon\circ D=d & \mapsto & [x\mapsto \varepsilon(x)+d(x)\tau]. \end{array}$$

(ここで, ε は $k[\mathbf{G}]$ の余単位射.)

[証明] $A=k[\mathbf{G}]$ とおく.

(右側の $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$) $\sigma\in\mathbf{G}(k[\tau])=\mathrm{Alg}_k(A,k[\tau])$, $\rho\circ\sigma=\varepsilon$ とすると, ある線形写像 $d:A\to k$ があって $\sigma=[x\mapsto\varepsilon(x)+d(x)\tau]$ と書ける. このとき明らかに $d(k)=0$. また $a,b\in A$ について,

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)=(\varepsilon(a)+d(a)\tau)(\varepsilon(b)+d(b)\tau)=\varepsilon(ab)+(\varepsilon(a)d(b)+\varepsilon(b)d(a))\tau$$

より,

$$d(ab)=\varepsilon(a)d(b)+\varepsilon(b)d(a).$$

よって $d\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\varepsilon k)$ を得る. 逆に $d\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\varepsilon k)$ が与えられたとき, $\sigma:A\to k[\tau]$ を $\sigma(x)=\varepsilon(x)+d(x)\tau$ により定めれば $\sigma\in\mathbf{G}(k[\tau])$ となるので, 右側の全単射が得られた.

(左側の $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$) $D\in\mathrm{Der}_k(A,A)$ を任意にとるとき, $d=\varepsilon\circ D$ とすれば $d\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\varepsilon k)$ となる. さらに D が左不変であれば,

$$D=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta\circ D=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ(\mathrm{id}\otimes D)\circ\Delta=(\mathrm{id}\otimes d)\circ\Delta$$

となるので, D は d から一意的に決まってしまう. 従って, 単射 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})\to\mathrm{Der}_k(A,{}_\varepsilon k)$, $D\mapsto\varepsilon\circ D$ が得られた. 逆に $d\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\varepsilon k)$ に対し $D=(\mathrm{id}\otimes d)\circ\Delta$ とすると, $a,b\in A$ に対し

$$\begin{aligned} D(ab) &= \sum a_{(1)}b_{(1)}\otimes d(a_{(2)}b_{(2)})=\sum a_{(1)}b_{(1)}\otimes(\varepsilon(a_{(2)})d(b_{(2)})+\varepsilon(b_{(2)})d(a_{(2)})) \\ &= a\sum b_{(1)}\otimes d(b_{(2)})+b\sum a_{(1)}\otimes d(a_{(2)})=aD(b)+bD(a) \end{aligned}$$

となり, $D\in\mathrm{Der}_k(A,A)$ がわかる. さらに, 任意の $a\in A$ について,

$$(\mathrm{id}\otimes D)(\Delta(a))=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}d(a_{(3)})=\Delta(D(a)).$$

よって D は左不変でもあり, $D\in\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ を得る. □

注意 12.8 $\mathbf{G}$ を体 k 上の代数的アフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$, $I = A^+$ とする. このとき, 11.3 節の議論を思い出すと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Der}_k(A, A) &\simeq \mathrm{Hom}_A(A \otimes_k I/I^2, A) \simeq \mathrm{Hom}_k(I/I^2, A) \\
&\simeq A \otimes_k \mathrm{Hom}_k(I/I^2, k) \simeq A \otimes_k \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon k) \\
&\simeq A \otimes_k \mathrm{Lie}(\mathbf{G}). \qquad (12.1)
\end{aligned}$$

$\pi : A \to I/I^2$, $a \mapsto (a - \varepsilon(a)) + I^2$ とする. 上の式 (12.1) において, $\mathrm{Hom}_k(I/I^2, k)$ の部分から左向きにたどって $\mathrm{Der}_k(A, A)$ の中に入る単射を考えると次のようになる:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_k(I/I^2, k) & \hookrightarrow & \mathrm{Der}_k(A, A) \\
\psi & \mapsto & [a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes \psi(\pi(a_{(2)}))].
\end{array}$$

一方, そこから右向きにたどる同型は次のような $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ への同型写像に他ならない:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_k(I/I^2, k) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon k) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Lie}(\mathbf{G}) \\
\psi & \mapsto & [a \mapsto \psi(\pi(a))] & \mapsto & [a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes \psi(\pi(a_{(2)}))].
\end{array}$$

(これの逆写像は $D \mapsto \varepsilon \circ D \mapsto [a + I^2 \mapsto \varepsilon(D(a))]$.) よって, 上の同型 (12.1) は $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ に制限すると恒等写像になる. 特に, $\mathrm{Der}_k(A, A)$ は A-module として $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ で生成されていることが分かる.

演習 12.9 $\mathbf{G}$ を体 k 上のアフィン群スキームとする.

(1) 定理 12.7 の同型により $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ から $\mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ に誘導されるブラケット積は, $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ に対し

$$[d_1, d_2] = (d_1 \otimes d_2 - d_2 \otimes d_1) \circ \Delta$$

で与えられることを示せ.

(2) $S : k[\mathbf{G}] \to k[\mathbf{G}]$ を $k[\mathbf{G}]$ の対合射 (antipode) とする. 任意の $d \in \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ および $a \in k[\mathbf{G}]$ について $d(S(a)) = -d(a)$ となることを示せ.

(3) $R = k[u, v]$ $(u^2 = v^2 = 0)$ とする. $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ に対し, $g_1, g_2 \in \mathbf{G}(R) = \mathrm{Alg}_k(k[\mathbf{G}], R)$ を

$$g_1 = [a \mapsto \varepsilon(a) + d_1(a)u], \quad g_2 = [a \mapsto \varepsilon(a) + d_2(a)v]$$

により定める. このとき g_1 と g_2 の交換子 $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ は

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}(a) = \varepsilon(a) + [d_1, d_2](a)uv \quad ({}^\forall a \in k[\mathbf{G}])$$

を満たすことを示せ (ヒント: $\mathbf{G}$ の逆元を与える自然変換 (functorial morphism) に対応する代数射は S であったから, $g \in \mathbf{G}(R)$ に対して $g^{-1} = g \circ S$ であることに注意. そして (2) を用いる).

(4) 定理 12.7 の同型により $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ から $\{\sigma \in \mathbf{G}(k[\tau]) \mid \rho \circ \sigma = \varepsilon\}$ に誘導されるリー環構造 (ベクトル空間構造とブラケット積) を求めよ. 特に, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の和が $\mathbf{G}(k[\tau])$ の積に対応することを確かめよ.

上の演習で述べられていることから, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ のブラケット積の非自明性が $\mathbf{G}$ の非可換性と密接に関係していることが分かる. 特に, $\mathbf{G}$ が可換群スキーム (i.e. $k[\mathbf{G}]$ が余可換ホップ代数) なら $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ は可換リー環である.

さてここで, とりあえず $\mathbf{GL}_n$ のリー環を求めてみよう:

例 12.10 $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$ とし, E を n 次の単位行列とすると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(\mathbf{G}) &\simeq \{E + \tau M \mid M \in M_n(k) \text{ s.t. } E + \tau M \in \mathbf{GL}_n(k[\tau])\} \\ &= \{E + \tau M \mid M \in M_n(k)\} \quad (\leftarrow (E+\tau M)(E-\tau M) = E \text{ に注意}) \\ &\simeq M_n(k).\end{aligned}$$

この同型により $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ から $M_n(k)$ に誘導されるブラケット積は何になるだろうか? 先程の演習の $\mathbf{G}(R)$ を考えると,

$$(E + uM)(E + vN)(E - uM)(E - vN) = E + uv(MN - NM).$$

というわけで結局, $M_n(k)$ の k-代数構造から普通に定義されるブラケット積 $[M, N] = MN - NM$ と一致する.

さらに次の系から, $\mathbf{GL}_n$ の閉部分群スキームのリー環が $M_n(k)$ の部分リー環として計算できることがわかる:

系 12.11 $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ を体 k 上のアフィン群スキームの準同型, $\varphi : k[\mathbf{H}] \to k[\mathbf{G}]$ を Φ に対応するホップ代数射とする. このとき Φ から, 次の図式を可換にするようなリー環の準同型 $d\Phi : \mathrm{Lie}(\mathbf{G}) \to \mathrm{Lie}(\mathbf{H})$ が誘導される ($d\Phi$ を $\mathrm{Lie}(\Phi)$ と書くこともある):

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Lie}(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k) & \xrightarrow{\sim} & \{\sigma \in \mathbf{G}(k[\tau]) \mid \rho \circ \sigma = \varepsilon\} \\ {\scriptstyle d\Phi}\downarrow & & {\scriptstyle -\circ\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle -\circ\varphi}\downarrow \\ \mathrm{Lie}(\mathbf{H}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{H}], {}_\varepsilon k) & \xrightarrow{\sim} & \{\sigma \in \mathbf{H}(k[\tau]) \mid \rho \circ \sigma = \varepsilon\}\end{array}$$

また, もし Φ が閉埋め込み (closed embedding) ならば $d\Phi$ は単射である.

[証明] 図式を可換にするような線形写像として $d\Phi$ を定義する. $d\Phi$ がリー環の準同型になることは, $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ に対し

$$\begin{aligned}[d_1 \circ \varphi, d_2 \circ \varphi] &= (d_1 \otimes d_2 - d_2 \otimes d_1) \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta = (d_1 \otimes d_2 - d_2 \otimes d_1) \circ \Delta \circ \varphi \\ &= [d_1, d_2] \circ \varphi\end{aligned}$$

となることから分かる. Φ が閉埋め込みのときは図式の一番右の縦射が包含写像となるので, 最後の主張は明らか. □

注意 12.12 k の標数が $p>0$ のときは, 上の $d\Phi$ は p-演算 $D\mapsto D^p$ も保存する (i.e. $d\Phi(D^p)=(d\Phi(D))^p$).

[証明] $D\mapsto D^p$ を $\mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ におきかえると,

$$\theta_{\mathbf{G}}: d\mapsto [a\mapsto \sum d(a_{(1)})\cdots d(a_{(p)})]$$

という写像になる. だから, $\theta_{\mathbf{H}}(d\circ\varphi)=\theta_{\mathbf{G}}(d)\circ\varphi$ をいえばよいが, それは φ がホップ代数射だから明らか. □

系 12.13 $\mathbf{G}$ を体 k 上の代数的アフィン群スキームとする.
(1) $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ は k 上有限次元である.
(2) $k\subset L$ を任意の体拡大, $\mathbf{G}_L=\mathrm{Spec}(L\otimes_k k[\mathbf{G}])$ ($\mathbf{G}$ の基礎体を L に変更したもの) とすると, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_L)\simeq L\otimes_k \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$.
(3) $\mathbf{G}$ が滑らか $\Leftrightarrow \dim\mathbf{G}=\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$.

[証明] (1)(3) $I=k[\mathbf{G}]^+$ とする. 注意 12.8 で述べたように $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})\simeq \mathrm{Hom}_k(I/I^2,k)$ であるから,

$$\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G})=\dim_k I/I^2=\mathrm{rank}\,\Omega_{k[\mathbf{G}]}<\infty.$$

(2) $L[\mathbf{G}_L]^+=L\otimes_k I$ より

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_L)\simeq\mathrm{Hom}_L(L\otimes_k I/I^2,L)\simeq L\otimes_k\mathrm{Hom}_k(I/I^2,k)\simeq L\otimes_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G}).$$

□

ちなみに, 次が成立する:

命題 12.14 $\mathbf{G}$ が体 k 上の代数的アフィン群スキームのとき, 常に $\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G})\geq\dim\mathbf{G}$ である.

[証明] $\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ も $\dim\mathbf{G}$ も基礎体の拡大で変わらないので, $k=\bar{k}$ としてよい.
$k[\mathbf{G}]$ のベキ零元根基 $\sqrt{(0)}$ に対応する $\mathbf{G}$ の閉部分スキームを $\mathbf{G}_{\mathrm{red}}$ と書く. すると $k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]$ は被約であり, k は完全体なので, $k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]\otimes_k k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]$ も被約となる. 故に $k[\mathbf{G}]\xrightarrow{\Delta}k[\mathbf{G}]\otimes_k k[\mathbf{G}]\twoheadrightarrow k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]\otimes_k k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]$ は $k[\mathbf{G}]\twoheadrightarrow k[\mathbf{G}_{\mathrm{red}}]$ を経由する. また, $k[\mathbf{G}]$ の余単位射 ε と対合射 S は代数射なので $\varepsilon(\sqrt{(0)})=0$, $S(\sqrt{(0)})\subset\sqrt{(0)}$. よって $\sqrt{(0)}$ は $k[\mathbf{G}]$ のホップイデアルであり, 従って $\mathbf{G}_{\mathrm{red}}$ は $\mathbf{G}$ の閉部分群スキームとなる.
11.6 節の定理により $\mathbf{G}_{\mathrm{red}}$ は滑らかであり, また系 12.11 により $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{red}})$ は $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の部分リー環となるので,

$$\dim\mathbf{G}=\dim\mathbf{G}_{\mathrm{red}}=\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{red}})\leq\dim_k\mathrm{Lie}(\mathbf{G}).$$

□

12.3 具体例

例 12.15 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} = \mathbf{GL}_1$ と考えれば $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq k$ である.

演習 12.16 $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ を $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により $\mathbf{GL}_2$ の閉部分群スキームとみなし, $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{a}}) \simeq k$ を示せ.

演習 12.17 k の標数が $p > 0$ であったとする.
(1) $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\mu}_p) \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq k$ を示せ.
(2) $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\alpha}_p) \simeq \mathrm{Lie}(\mathbf{G}_{\mathrm{a}}) \simeq k$ を示せ.

この演習のように, 正標数の体上では有限群スキームについても非自明なリー環が出てくることがある.

例 12.18 $\mathbf{SL}_n$ のリー環を計算するには, $E + \tau M \in \mathbf{GL}_n(k[\tau])$ のうち, $E + \tau M \in \mathbf{SL}_n(k[\tau])$ となるような M の条件を求めればよい. $M = (a_{ij})$ とすると,

$$\det(E + \tau M) = \det(\delta_{ij} + \tau a_{ij}) = (1 + \tau a_{11}) \cdots (1 + \tau a_{nn}) = 1 + \tau(\mathrm{tr}\, M).$$

よって, $E + \tau M \in \mathbf{SL}_n(k[\tau]) \Leftrightarrow \mathrm{tr}\, M = 0$. 従って,

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{SL}_n) \simeq \{M \in M_n(k) \mid \mathrm{tr}\, M = 0\}.$$

演習 12.19 (1) 直交群スキーム $\mathbf{O}_n$ を $\mathbf{O}_n : R \mapsto \{g \in \mathbf{GL}_n(R) \mid g^t g = E\}$ により定める. $\mathrm{Lie}(\mathbf{O}_n)$ を求めよ.
(2) $J = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \in M_{2n}(k)$ として, シンプレクティック群スキーム $\mathbf{Sp}_{2n}$ を $\mathbf{Sp}_{2n} : R \mapsto \{g \in \mathbf{GL}_{2n}(R) \mid {}^t gJg = J\}$ により定める. $\mathrm{Lie}(\mathbf{Sp}_{2n})$ を求めよ.

12.4 閉部分群スキームおよび部分表現について

定理 12.20 $\mathbf{G}$ を体 k 上の連結かつ滑らか[1]な代数的アフィン群スキームとする. $\mathbf{H}$ を $\mathbf{G}$ の真閉部分群スキームとすると, $\dim \mathbf{H} < \dim \mathbf{G}$ である.

[証明] 仮定より $k[\mathbf{G}]$ は整域で, $\dim \mathbf{G}$ は $k[\mathbf{G}]$ の商体の k 上超越次数に等しい. また, $\mathbf{H}$ に対応する $k[\mathbf{G}]$ のホップイデアルを I とすると, I のある随伴素因子 $P \subset k[\mathbf{G}]$ があって $k[\mathbf{G}]/P$ の商体の k 上超越次数が $\dim \mathbf{H}$ と等しい. あとは次の補題から従う. □

[1]実際には被約であれば十分

補題 12.21 A を体 k 上のアフィン整域 (有限生成な可換 k-代数かつ整域), $P \subset A$ を 0 でない素イデアルとする. $Q(A)$, $Q(A/P)$ をそれぞれ A, A/P の商体とすると, $\operatorname{trdeg}_k Q(A/P) < \operatorname{trdeg}_k Q(A)$.

[証明] ネーターの正規化定理により, ある k 上の多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n] \subset A$ $(n = \operatorname{trdeg}_k Q(A))$ があって, A は有限生成 $k[x_1, \ldots, x_n]$-加群となる. もし $P \cap k[x_1, \ldots, x_n] \neq 0$ なら $x_1, \ldots, x_n$ の A/P における像は代数的に従属となり, 補題の主張が従う. そこで, 以下 $P \cap k[x_1, \ldots, x_n] = 0 \Rightarrow P = 0$ を示す. $P \cap k[x_1, \ldots, x_n] = 0$ のとき, $S = k[x_1, \ldots, x_n] \backslash \{0\}$ とすると, $A_P \supset S^{-1}A$ となる. ところが, $S^{-1}A$ は $S^{-1}k[x_1, \ldots, x_n] = k(x_1, \ldots, x_n)$ 上有限次元な整域なので, 体でなければならない. 従って, 任意の $a \in A \setminus \{0\}$ は $S^{-1}A$ の可逆元, よって A_P の可逆元となる. すなわち $a \in A \setminus P$. これは $A \setminus \{0\} = A \setminus P$ を意味するので, $P = 0$ を得る. □

系 12.22 $\mathbf{G}$ を体 k 上の連結かつ滑らかな代数的アフィン群スキーム, $\mathbf{H}$ を $\mathbf{G}$ の滑らかな閉部分群スキームとする. このとき, $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}) = \mathrm{Lie}(\mathbf{G}) \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{G}$.

[証明] $(\Leftarrow)$ 明らか. $(\Rightarrow)$ もし $\mathbf{H} \neq \mathbf{G}$ とすると定理より $\dim \mathbf{H} < \dim \mathbf{G}$ となり, よって系 12.13 (3) より $\dim_k \mathrm{Lie}(\mathbf{H}) < \dim_k \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$. □

この系で $\mathbf{H}$ が滑らかであるという仮定が必要なことは, 演習 12.17 の例から分かる. k の標数が 0 のときはすべての代数的アフィン群スキームが滑らかなので, この結果が威力を発揮する.

アフィン群スキームの線形表現に付随するリー環の表現. $\mathbf{G}$ を体 k 上のアフィン群スキーム, V を k-ベクトル空間とし, $\mathbf{G}$ の V 上の線形表現 $\mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ が与えられているとする. V が有限次元のときは $\mathrm{Lie}(\mathbf{GL}_V) \simeq \mathrm{End}_k(V)$ だから, 系 12.11 の意味で $\mathbf{G}$ の表現から $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の表現 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}) \to \mathrm{End}_k(V)$ が誘導されるが, これを一般の V についても拡張することができる. 具体的には, $\rho : V \to V \otimes_k k[\mathbf{G}]$ を $\mathbf{G}$ の表現に対応する $k[\mathbf{G}]$-余加群構造射とするとき, リー環の表現が

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Lie}(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_{\varepsilon}k) & \to & \mathrm{End}_k(V) \\ D & \mapsto & \varepsilon \circ D = d & \mapsto & (\mathrm{id} \otimes d) \circ \rho \end{array}$$

で与えられる.

補題 12.23 $\mathbf{G}$ を体 k 上のアフィン群スキーム, V を k-ベクトル空間とし, $\mathbf{G}$ の V 上の線形表現 $\mathbf{G} \to \mathbf{GL}_V$ が与えられているとする. V の k-部分空間 W に対し, W の安定化子 (stabilizer) $\mathbf{H}_W$ を, 可換 k-代数 R に

$$\mathbf{H}_W(R) = \{g \in \mathbf{G}(R) \mid g \cdot (W \otimes_k R) = W \otimes_k R\}$$

を対応させる群関手として定める. このとき $\mathbf{H}_W$ は $\mathbf{G}$ の閉部分群スキームである.

[証明] $\rho : V \to V \otimes_k k[\mathbf{G}]$ を $\mathbf{G}$ の表現に対応する $k[\mathbf{G}]$-余加群構造射とする. V の k-基底 $\{v_i \mid i \in I\}$ を, $\{v_i \mid i \in J\}$ $(J \subset I)$ が W の k-基底になるようにとる. また, $a_{ij} \in k[\mathbf{G}]$ $(i \in I,\ j \in J)$ を

$$\rho(v_j) = \sum_{i \in I} v_i \otimes a_{ij} \quad ({}^\forall j \in J)$$

を満たすようにとる. 任意の可換 k-代数 R と $g \in \mathbf{G}(R)$ に対し, $g \cdot (v_j \otimes 1) = \sum_{i \in I} v_i \otimes g(a_{ij})$ および $g^{-1} \cdot (v_j \otimes 1) = \sum_{i \in I} v_i \otimes g(S(a_{ij}))$ (${}^\forall j \in J$, S は $k[\mathbf{G}]$ の対合射) だから,

$$\begin{aligned} g \cdot (W \otimes_k R) \subset W \otimes_k R &\iff g(a_{ij}) = 0 \quad ({}^\forall j \in J,\ {}^\forall i \in I \setminus J), \\ g^{-1} \cdot (W \otimes_k R) \subset W \otimes_k R &\iff g(S(a_{ij})) = 0 \quad ({}^\forall j \in J,\ {}^\forall i \in I \setminus J). \end{aligned}$$

よって, $\mathbf{H}_W$ は $\{a_{ij}, S(a_{ij}) \mid j \in J,\ i \in I \setminus J\}$ で生成される $k[\mathbf{G}]$ のイデアルに対応する $\mathbf{G}$ の閉部分スキームである. □

定理 12.24 k を標数 0 の体, $\mathbf{G}$ を k 上の連結な代数的アフィン群スキーム, V を $k[\mathbf{G}]$-余加群とする. このとき V の k-部分空間 W について, W が $\mathbf{G}$-不変部分空間 ($k[\mathbf{G}]$-部分余加群) $\Leftrightarrow$ W が $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$-不変部分空間.

[証明]($\Rightarrow$) は明らか. ($\Leftarrow$) を示すには, W が $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の作用で不変であるときに $\mathbf{H}_W = \mathbf{G}$ となることを示せばよい. k の標数が 0 なので $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}_W$ は滑らかである. だから, 系 12.22 により, $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_W) = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ をいえば証明が終わる. $\varphi : k[\mathbf{G}] \twoheadrightarrow k[\mathbf{H}_W]$ を標準全射 (閉埋め込み $\mathbf{H}_W \hookrightarrow \mathbf{G}$ に対応するホップ代数射) とする. このとき, $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{H}_W], {}_\varepsilon k) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ の像に $\mathrm{Der}_k(k[\mathbf{G}], {}_\varepsilon k)$ の元 d が含まれるための必要十分条件は, $d(a) = 0$ (${}^\forall a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$) となる. さらに上の補題の記号を使えば, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は $\{a_{ij}, S(a_{ij}) \mid j \in J,\ i \in I \setminus J\}$ で生成される $k[\mathbf{G}]$ のイデアルであるから,

$$d(a) = 0 \ ({}^\forall a \in \mathrm{Ker}\,\varphi) \iff d(a_{ij}) = 0 \ ({}^\forall j \in J,\ {}^\forall i \in I \setminus J)$$

(($\Rightarrow$) 明らか. ($\Leftarrow$) $d(aa_{ij}) = \varepsilon(a_{ij})d(a) = 0$ (${}^\forall a \in k[\mathbf{G}]$, ${}^\forall j \in J$, ${}^\forall i \in I \setminus J$), $d \circ S = -d$ に注意). よって, $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_W)$ は, W を不変にする $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の元全体と一致する. 従って, W が $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の作用で不変ならば $\mathrm{Lie}(\mathbf{H}_W) = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ である. □

というわけで, 基礎体の標数が 0 のときは, $\mathbf{G}$ の表現を $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ の表現に置き換えて論じることができる場合が多い.

３学期のレポート課題. この章の演習問題のうち 1 つ以上を解いて D705 の天野のメールボックスまで提出してください (期限: 2 月 29 日まで).