2011 年度 代数学 II

ケーラー微分形式とアファィン群スキームの滑らかさ

天野勝利

(2011 年 12 月 2 日〜2011 年 12 月 20 日)

参考文献

W.C. Waterhouse, “Introduction to affine group schemes”, Graduate Texts in Mathematics 66, Springer, New York, 1979.

増岡先生の授業から引き続き, この本の Part III, IV の内容にあたる部分を講義していきます. この原稿は Part III, The Infinitesimal Theory の Ch. 11 にあたる部分の講義ノートです.

11 ケーラー微分形式

11.1 導分と微分形式

k を可換環とする (後で k を体と仮定するが, 11.3 節まではこれでいくことにする). A を可換 k-代数, M を A-加群とする. $D: A \to M$ が A から M への**導分 (derivation)** であるとは, D が加法的であり, かつ

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) \quad ({}^{\forall}a, b \in A)$$

を満たすことをいう. もしさらに D が k-線形 ($\Leftrightarrow D(k) = 0$) でもあれば, D は **k-導分**であるという. A から M への k-導分全体を $\mathrm{Der}_k(A, M)$ と書く.

定理 11.1 (1) A を可換 k-代数とする. このとき, ある A-加群 Ω_A と k-導分 $d: A \to \Omega_A$ が存在して, 次を満たす: 任意の A-加群 M に対し,

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ d.$$

このような (Ω_A, d) は A-加群同型の差を除き一意的に定まる.

(2) 上記でさらに A が k 上有限生成で,

$$A = k[X_1, \ldots, X_n]/I, \quad I = (f_1, \ldots, f_m)$$

と書けているとする. 各 X_i の A における像を x_i とするとき, Ω_A は生成元 $dx_1, \ldots, dx_n$ と関係式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial X_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_i = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

で定義される A-加群と一致する.

[証明] (1) 形式的に, da $(a \in A)$ たちを基底とする自由 A-加群 $\bigoplus_{a\in A} Ada$ を考え, これを

$$dc \ \ (c \in k), \quad adb + bda - d(ab), \ \ da + db - d(a+b) \ \ (a, b \in A)$$

で生成される部分 A-加群で割った剰余加群を Ω_A とする. da の Ω_A における像をまた da と書くことにすれば, k-導分 $d : A \to \Omega_A$ が自然に定義される. この (Ω_A, d) が条件を満たす. 実際, 任意の k-導分 $D : A \to M$ に対し, $\varphi(da) = D(a)$ により定まる A-加群写像 $\varphi : \Omega_A \to M$ が対応する.

(Ω'_A, d') を条件を満たす別の組とするとき, $d = \psi \circ d'$, $d' = \varphi \circ d$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, \Omega'_A)$ と $\psi \in \mathrm{Hom}_A(\Omega'_A, \Omega_A)$ が一意的に存在する. すると $(\psi \circ \varphi) \circ d = d = \mathrm{id} \circ d$ だから, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. 同様に, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ を得る.

(2) 与えられた A-加群を $\widetilde{\Omega}_A$ とおく. k-導分 $d : A \to \widetilde{\Omega}_A$ を

$$d(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_i \quad ({}^\forall f \in k[X_1, \ldots, X_n])$$

により定める (これが well-defined であることは, $d(a+b) = d(a) + d(b)$ と $d(f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ $({}^\forall f \in I)$ を確かめることにより分かる). 一方, $D : A \to M$ を任意の k-導分とすると, 形式的な微分演算により

$$D(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1, \ldots, x_n) D(x_i) \quad ({}^\forall f \in k[X_1, \ldots, X_n]).$$

特に, $f \in I$ なら $D(f(x_1, \ldots, x_n)) = D(0) = 0$. よって, D に対し $\varphi(dx_i) = D(x_i)$ なる $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\widetilde{\Omega}_A, M)$ が対応する. □

この定理の Ω_A の元を**ケーラー微分形式**といい, Ω_A を**微分形式加群**と呼ぶ. また, k を明記する必要がある場合は Ω_A を $\Omega_{A/k}$ と書くこともある.

例 11.2 $A = k[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ とすると,

$$\Omega_A = Adx + Ady, \quad 2xdx + 2ydy = 0.$$

もし k が標数 2 の体なら, Ω_A は階数 2 の自由 A-加群である. また, k が標数 2 以外の体なら, Ω_A は $d\theta = xdy - ydx$ を基底とする階数 1 の自由 A-加群となる ($dx = -yd\theta$, $dy = xd\theta$).

k が体の時に Ω_A が自由 A-加群になることは現時点ではあまり明らかではないが, A には可換ホップ代数の構造が入る (いわゆる circle group の座標環) ので, 後述する 11.3 節の系によりそれが分かる (たぶん直接証明もできると思いますが).

11.2 簡単な性質

A, B を可換 k-代数とする.

(a) $\Omega_{A\otimes k'/k'} \xrightarrow{\sim} \Omega_A \otimes k'$ ($k \to k'$ は可換環の拡大, $\otimes = \otimes_k$).

[証明] $a \otimes c \in A \otimes k'$ を単に ac と書くと, $\Omega_{A\otimes k'/k'}$ において $d(ac) = cda + adc = cda$. よって, 両者の生成元と関係式が一致する. $\square$

(b) $\Omega_{A\times B} \simeq \Omega_A \times \Omega_B$.

[略証] M を任意の $A \times B$-加群とする. $M_A = (A, 0)M$, $M_B = (0, B)M$ とすれば,

$$\mathrm{Der}_k(A \times B, M) \simeq \mathrm{Der}_k(A, M_A) \times \mathrm{Der}_k(B, M_B).$$

これと

$$\mathrm{Hom}_{A\times B}(\Omega_A \times \Omega_B, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M_A) \times \mathrm{Hom}_B(\Omega_B, M_B)$$

をあわせて上記の結果を得る. $\square$

(c) $A \supset S$ を乗法的閉集合とすると, $\Omega_{S^{-1}A} = \Omega_A \otimes_A S^{-1}A$.

[略証] M を任意の $S^{-1}A$-加群とする. $\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_A \otimes_A S^{-1}A, M)$ だから, 任意の k-導分 $D : A \to M$ が一意的に k-導分 $S^{-1}A \to M$ に拡張できることを示せばよい. そのような拡張は $D(a/s) = (1/s^2)(sD(a) - aD(s))$ により得られる. 一意性は, $s \in S$ に対し $0 = D(1) = D(s(1/s)) = sD(1/s) + (1/s)D(s)$ より $D(1/s) = -(1/s^2)D(s)$ となることから従う. $\square$

(d) $\beta : A \to k$ を k-代数射, $I = \mathrm{Ker}\,\beta$ とする. また, k-加群 M を β により A-加群と見たものを ${}_\beta M$ と書き, $- \otimes_A ({}_\beta M)$ を単に $- \otimes_\beta M$ と書くことにする. このとき, $A \otimes_\beta k$-加群としての同型

$$\Omega_{A\otimes_\beta k} \simeq \Omega_A \otimes_\beta k \ (= \Omega_A/I\Omega_A) \ \simeq A \otimes_\beta I/I^2 \ (= I/I^2)$$

が成立する. また,

$$\mathrm{Hom}_k(I/I^2, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, {}_\beta N), \quad \varphi \mapsto [a \mapsto \varphi((a - \beta(a)) + I^2)]$$

(逆写像は $D \mapsto [b + I^2 \mapsto D(b)]$).

[証明] 任意の $A \otimes_\beta k$-加群 N に対し,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_k(\Omega_A \otimes_\beta k, N) &= \mathrm{Hom}_{A\otimes_\beta k}(\Omega_A \otimes_\beta k, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, {}_\beta N) \simeq \mathrm{Der}_k(A, {}_\beta N) \\
&\simeq \mathrm{Der}_k(A \otimes_\beta k, N).
\end{aligned}$$

よって $\Omega_{A\otimes_\beta k}\simeq\Omega_A\otimes_\beta k$ となる．次に,

$$\mathrm{Hom}_k(I/I^2,N)=\mathrm{Hom}_{A\otimes_\beta k}(A\otimes_\beta I/I^2,N)\simeq\mathrm{Der}_k(A\otimes_\beta k,N)\ (\simeq\mathrm{Der}_k(A,{}_\beta N))$$

となることを示す．まず,

$$A/(k+I^2)\xrightarrow{\sim}I/I^2,\quad a+(k+I^2)\mapsto(a-\beta(a))+I^2$$

により $\mathrm{Hom}_k(I/I^2,N)\simeq\mathrm{Hom}_k(A/(k+I^2),N)$．他方, $A\twoheadrightarrow{}_\beta(A/(k+I^2))$ は k-導分である (任意の $a,b\in A$ について, $\beta(a)b+\beta(b)a-ab=\beta(ab)-(a-\beta(a))(b-\beta(b))\in k+I^2$)．さらに, 任意の $D\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\beta N)$ に対し $D(k+I^2)=0$ となるので, $\mathrm{Hom}_k(A/(k+I^2),N)\simeq\mathrm{Der}_k(A,{}_\beta N)$ を得る． □

(e) k が体, $\dim_k A<\infty$ であったとする．このとき, $\Omega_A=0\Leftrightarrow A$ が分離代数.

[証明] (a) より, k は代数閉体であったとしてよい．

(⇐) (b) より, $\Omega_{k\times\cdots\times k}\simeq\Omega_k\times\cdots\times\Omega_k=0$.

(⇒) $\dim_k A<\infty$ より, $A=\prod A_i$, 各 A_i は局所代数, と書ける．(b) と $\Omega_A=0$ より, $\Omega_{A_i}=0$ $({}^\forall i)$. m_i を A_i の極大イデアルとすると, $\beta:A_i\to A/m_i\simeq k$ に (d) を適用すれば $m_i/m_i^2=0$ を得るので, $m_i=m^2$．従って, $m_i=\bigcap_n m_i^n=0$ (Krull の交叉定理. 本の Appendix, (A.6) を参照)．よって $A_i\simeq k$ $({}^\forall i)$. □

(f) N を B-加群とする．$C=B\oplus N$ に積を $(b,n)(b',n')=(bb',bn'+b'n)$ により入れる．このとき C は可換 B-代数となり, 可換 k-代数 A に対して,

$$\mathrm{Alg}_k(A,C)\overset{1:1}{\leftrightarrow}\{(\varphi,D)\mid\varphi\in\mathrm{Alg}_k(A,B),\ D\in\mathrm{Der}_k(A,{}_\varphi N)\}.$$

ここで, ${}_\varphi N$ は, N を $\varphi:A\to B$ により A-加群とみなしたものを表す.

[証明] $\psi\in\mathrm{Alg}_k(A,C)$ に対し, $\varphi:A\xrightarrow{\psi}C\xrightarrow{\text{proj.}}B$ と $D:A\xrightarrow{\psi}C\xrightarrow{\text{proj.}}N$ を対応させればよい．逆の対応は, (φ,D) に対して $\psi(a)=(\varphi(a),D(a))$ とすれば得られる． □

11.3 可換ホップ代数の微分形式

定理 11.3 (A,Δ,ε,S) を可換 k-ホップ代数, $I=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ $(=:A^+)$ とする．

$$\pi:A\twoheadrightarrow A/(k+I^2)\xrightarrow{\sim}I/I^2,\quad a\mapsto(a-\varepsilon(a))+I^2$$

とするとき, $\Omega_A\simeq A\otimes_k(I/I^2)$ で, $d:A\to A\otimes_k(I/I^2)$ は $da=\sum a_{(1)}\otimes\pi(a_{(2)})$ で与えられる．

[証明] 一般に, B を可換 k-代数, N を B-加群とするとき, 11.2 節 (f) の意味で $C = B \oplus N$ に可換 B-代数 (従って可換 k-代数) の構造が入る. すると A は可換ホップ代数なので $\mathrm{Alg}_k(A, C)$ は群になるが, それにより $\{(\varphi, D) \mid \varphi \in \mathrm{Alg}_k(A, B),\ D \in \mathrm{Der}_k(A, {}_\varphi N)\}$ に入る群演算は

$$(\varphi, D) \cdot (\varphi', D') = (\varphi * \varphi', \varphi * D' + \varphi' * D)$$

(ここで, $\varphi * \varphi'$ は $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ における積を表し, 右側の例えば $\varphi * D'$ は $(\varphi * D')(a) = \sum \varphi(a_{(1)}) D'(a_{(2)})$ で定まる写像) で与えられる. そして, この群は $\mathrm{Alg}_k(A, B)$ と $\{(\varepsilon, D) \mid D \in \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon N)\}$ ($\simeq \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon N)$) との半直積になっている:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Alg}_k(A, B) \ltimes \{(\varepsilon, D)\} & \xrightarrow{\sim} & \{(\varphi, D) \mid \varphi \in \mathrm{Alg}_k(A, B),\ D \in \mathrm{Der}_k(A, {}_\varphi N)\} \\ (\varphi, (\varepsilon, D)) & \mapsto & (\varphi, 0) \cdot (\varepsilon, D) = (\varphi, \varphi * D). \end{array}$$

ここで, $B = A$ として上記の写像の $\varphi = \mathrm{id}_A$ の部分を考えることにより, 対応

$$\mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, N)$$

を得る. 一方, 11.2 節 (d) より

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k (I/I^2), N) \simeq \mathrm{Hom}_k(I/I^2, N) \simeq \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon N).$$

以上から, 定理の結果を得る. 最後の主張は, 上記で $N = A \otimes_k (I/I^2)$ として id_N の行先を調べれば分かる:

$$\begin{array}{rcccccc} \mathrm{Hom}_A(N, N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_k(I/I^2, N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(A, {}_\varepsilon N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Der}_k(A, N) \\ \mathrm{id}_N & \mapsto & [\alpha \mapsto 1 \otimes \alpha] & \mapsto & [a \mapsto 1 \otimes_k \pi(a)] & \mapsto & [a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes \pi(a_{(2)})]. \end{array}$$

□

系 11.4 k が体のとき, A を可換 k-ホップ代数とすると, Ω_A は自由 A-加群である.

11.4 標数 0 の体上では可換ホップ代数に非自明なベキ零元が存在しないこと

定理 11.5 (Cartier) k を標数 0 の体とする. このとき可換 k-ホップ代数は常に被約である.

[略証] 有限性定理 (3.3 節) により, すべての可換 k-ホップ代数は有限生成な部分ホップ代数たちの有向和集合として表せるから, 任意の有限生成可換 k-ホップ代数 A について定理が言えればよい. このとき ε を A の counit, $I = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ とすれば, 11.1, 11.3 節により I/I^2 は k 上有限次元である. ここでまず次の補題を示す:

補題. $x_1, \ldots, x_r \in I$ の像が I/I^2 の k 上の基底をなすとする. $n = 1, 2, 3, \ldots$ について, $\{x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} + I^{n+1} \mid \sum_{i=1}^r m_i = n\}$ は k-ベクトル空間 I^n/I^{n+1} の基底をなす.

[略証] $i = 1, \ldots, r$ について, $\mathrm{Hom}_k(I/I^2, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, A)$ において $[x_j + I^2 \mapsto \delta_{ij}]$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) に対応する k-導分を $D_i \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ とすると, $D_i(x_j) \equiv \delta_{ij} \pmod{I}$ となる. すると, $x_1, \ldots, x_r$ の任意の n 次斉次多項式に対し, 適当に D_i たちをかけて任意の項の係数を $\mathrm{mod}\ I$ でくくり出すことができる (ここで k の標数が 0 であることを使う). (任意の $D \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ について $D(I^{n+1}) \subset I^n$ だから $x \equiv y \pmod{I^{n+1}} \Rightarrow D(x) \equiv D(y) \pmod{I^n}$ となることに注意.) □(補題)

さて, A が被約 $\Leftrightarrow \bar{k} \otimes_k A$ が被約 (本の 6 章, 演習 2), だから $k = \bar{k}$ のときに定理を示せば十分である. また, ${}^\forall y \in A$ について $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ を示せば A が被約であることが言える.

$y \in A$, $y^2 = 0$ とするとき, まず, 補題を使って $y \in \bigcap_{n=1}^\infty I^n$ を示すことができる. (実際, $I^n \ni y \notin I^{n+1}$ となる n があるとすると, $y = y_0 + y_1$ ($y_1 \in I^{n+1}$, y_0 は $x_1, \ldots, x_r$ の n 次斉次多項式) と書け, $0 = y^2 \equiv y_0^2 \pmod{I^{2n+1}}$ とならねばならないが, 補題により $y_0^2 \in I^{2n}$ の各単項式は $\mathrm{mod}\ I^{2n+1}$ で k-線形独立ゆえ, $y_0^2 \equiv 0 \pmod{I^{2n+1}}$ となるはずがない. これは矛盾である.)

さらに, $A \supset M$ を任意の極大イデアルとすると, k は代数閉体としているので, ある $g \in \mathrm{Alg}_k(A, k)$ があって $M = \mathrm{Ker}\, g$ となる. この g による変換

$$T_g : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_k A \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} k \otimes_k A \xrightarrow{\sim} A$$

を考えると, これは逆写像 $T_{g^{-1}}$ をもつ k-代数同型であり, さらに $T_g(M) = I$ となる. すると, $T_{g^{-1}}(y)^2 = 0$ より $T_{g^{-1}}(y) \in \bigcap_{n=1}^\infty I^n$ だから, $y \in \bigcap_{n=1}^\infty M^n$. よって, Krull の交叉定理により, $y \in \bigcap_M \bigcap_{n=1}^\infty M^n = 0$. □

系 11.6 標数 0 の体上の有限アフィン群スキームは常にエタールである. (i.e. 標数 0 の体上の有限次元可換ホップ代数は常に分離代数である.)

系 11.7 k を標数 0 の代数閉体とすると, k 上の有限生成可換ホップ代数は常にアフィン代数群の座標環と同型で, 従って (4 章により) ある代数的行列群の座標環と同型である.

k が標数 $p > 0$ の体である場合, 定理は一般には成立しない (例えば, $k[\boldsymbol{\alpha}_p] = k[X]/(X^p)$ や $k[\boldsymbol{\mu}_p] = k[X]/(X^p - 1)$ は被約ではない). ただ, 証明中の補題の議論は $m_i < p$ ($i = 1, \ldots, r$) となる範囲の単項式たち $x_1^{m_i} \cdots x_r^{m_i}$ については成立するので, 次の系を得る.

系 11.8 $\mathbf{G}$ を標数 $p > 0$ の体 k 上の有限アフィン群スキームとし, $I = k[\mathbf{G}]^+$ とする. また, 任意の $x \in I$ について $x^p = 0$ となることを仮定する (このとき $\mathbf{G}$ は高さ 1 であるという). このとき, $x_1, \dots, x_r \in I$ を, それらの像が I/I^2 の k-基底になるようにとれば, $\{x_1^{m_i} \cdots x_r^{m_i} \mid 0 \le m_i < p \ (i = 1, \dots, r)\}$ が $k[\mathbf{G}]$ の k-基底をなす. 特に, $\dim_k k[\mathbf{G}] = p^r$.

[証明] $n > r(p-1)$ のとき $I^n = 0$ となることに注意すれば, $k[\mathbf{G}] = k \oplus I \simeq \bigoplus_{n=0}^{r(p-1)} I^n/I^{n+1}$ (ただし, $I^0 = k[\mathbf{G}]$). 後は補題の議論と同様. □

11.5 体拡大の微分形式

定義 11.9 体の拡大 L/k が**分離生成 (separably generated)** であるとは, ある中間体 $L \supset E \supset k$ で

$$L/E : \text{有限次分離拡大}, \quad E/k : \text{純超越拡大} \tag{11.1}$$

となるものが存在することをいう.

もし k が完全体で L が k 上有限生成ならば, L/k は常に分離生成である (本の Appendix, (A.9) を参照).

定理 11.10 L/k を有限生成な体拡大とする. このとき,

$$L/k \text{ が分離生成} \Leftrightarrow \dim_L \Omega_{L/k} = \operatorname{trdeg}(L/k) \ (\text{超越次数}).$$

また上記が成立するとき, $dx_1, \dots, dx_n$ が $\Omega_{L/k}$ の L 上の基底となるような $x_1, \dots, x_n \in L$ をとると, $x_1, \dots, x_n$ は k 上代数的独立で, $E = k(x_1, \dots, x_n)$ が (11.1) を満たす.

[証明] ($\Rightarrow$) L/k が分離生成であるとする. (11.1) を満たす中間体 E をとり, $E = k(y_1, \dots, y_n)$, ただし $y_1, \dots, y_n$ は k 上代数的独立, とする (L/k が有限生成なので $n := \operatorname{trdeg}(E/k) = \operatorname{trdeg}(L/k) < \infty$ であることに注意). またこのとき, L/E が有限次分離拡大なので, ある $y_{n+1} \in L$ が存在して $L = E(y_{n+1})$ と書ける. $f \in E[Y_{n+1}]$ を y_{n+1} の E 上の最小多項式とするとき, 適当に E の元をかけて, f は $k[y_1, \dots, y_n][Y_{n+1}] \simeq k[Y_1, \dots, Y_{n+1}]$ ($n+1$ 変数多項式環) の既約元であったとしてよい. このとき L は $A := k[Y_1, \dots, Y_{n+1}]/(f)$ の商体と同一視できる. 11.1 節の定理より, $\Omega_{A/k}$ は生成元 $dy_1, \dots, dy_{n+1}$ と関係式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial Y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}) dy_i = 0$ で定義される A-加群と一致する. そして 11.2 節 (c) より $\Omega_{L/k} = L \cdot \Omega_{A/k}$ である. ここで, y_{n+1} は E 上分離的だから $\dfrac{\partial f}{\partial Y_{n+1}}(y_1, \dots, y_{n+1}) \neq 0$. よって, $\Omega_{L/k}$ において dy_{n+1} は $dy_1, \dots, dy_n$ の L-線形結合で書ける. 関係式はその 1 つしかないので, $dy_1, \dots, dy_n$ は L 上線形独立であり, 従って $\dim_L \Omega_{L/k} = n = \operatorname{trdeg}(L/k)$ を得る.

($\Leftarrow$) $n := \mathrm{trdeg}(L/k) = \dim_L \Omega_{L/k}$ とする. $dx_1, \ldots, dx_n$ が $\Omega_{L/k}$ の L 上の基底となるような $x_1, \ldots, x_n \in L$ をとり, $E = k(x_1, \ldots, x_n)$ とおく. L/E の中間体 F で, L/F が有限次拡大, F/E が純超越拡大, となるものをとる. このとき, 定義より $\Omega_{L/E}$ は $\Omega_{L/k}$ を dc $(c \in E)$ たちで生成される L-部分空間で割った商空間となるが, $x_1, \ldots, x_n \in E$ だから結局 $\Omega_{L/E} = 0$ となる. とくに $\Omega_{L/F} = 0$ となるので, 11.2 節 (e) より, L/F は有限次分離拡大である. 従って, L/E に上記の ($\Rightarrow$) の証明を適用することができて, $\mathrm{trdeg}(L/E) = \dim_L \Omega_{L/E} = 0$ を得る. これはつまり, L の中に E 上超越的な元はなく, 実は $E = F$ であることを意味する. またさらに, $\mathrm{trdeg}(E/k) = \mathrm{trdeg}(L/k) = n$ となるので, $x_1, \ldots, x_n$ は k 上代数的独立である. □

11.6 滑らかな代数的アフィン群スキーム

$\mathbf{G}$ を体 k 上の代数的アフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. このとき 11.3 節により, Ω_A は自由 A-加群である. その階数を $\mathrm{rank}\,\Omega_A$ と書く. また, $\mathbf{G}^\circ$ を $\mathbf{G}$ の単位連結成分とし, $k[\mathbf{G}^\circ] \supset \sqrt{(0)}$ をベキ零元根基 (nilradical) とするとき, $k[\mathbf{G}^\circ]/\sqrt{(0)}$ の商体の k 上超越次数を $\mathbf{G}$ の**次元**と呼び, $\dim \mathbf{G}$ と書く. この $\dim \mathbf{G}$ は基礎体を拡大しても変わらない.

定義 11.11 上の状況で, $\dim \mathbf{G} = \mathrm{rank}\,\Omega_A$ が成り立つとき, $\mathbf{G}$ は**非特異 (non-singular)** または**滑らか (smooth)** であるという.

定理 11.12 $\mathbf{G}$ を体 k 上の代数的アフィン群スキーム, $A = k[\mathbf{G}]$ とする. このとき, $\mathbf{G}$ が滑らかであるための必要十分条件は, $A \otimes_k \bar{k}$ が被約であることである.

[証明 (十分性)] 必要性は 13.5 節で示す. ここでは十分性のみ証明する. すなわち, $A \otimes_k \bar{k}$ が被約であることを仮定して $\mathbf{G}$ が滑らかであることを示す.

11.2 節 (a) より, $\mathrm{rank}\,\Omega_A$ も基礎体の拡大で変わらない. よって $k = \bar{k}$ としてよい. さらに, $\mathbf{G}$ が連結でない場合は 11.2 節 (b) より Ω_A は積に分解して書けるので, 結局 $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ$ (連結) のときに示せば十分である (6.6, 6.7 節を参照). このとき $A = k[\mathbf{G}] = k[\mathbf{G}^\circ]$ は整域である. K を A の商体とすると, 11.2 節 (c) より $\mathrm{rank}\,\Omega_A = \dim_K \Omega_K$. 一方, k は完全体なので, K/k は分離生成である. よって 11.5 節の定理により $\dim_K \Omega_K = \mathrm{trdeg}(K/k) = \dim \mathbf{G}$ を得る. □

上の定理の「$A \otimes_k \bar{k}$ が被約」という条件は次の意味で少し弱い表現にすることもできる:

$A \otimes_k \bar{k}$ が被約 $\Leftrightarrow$ ある k の拡大体 L があって, L が完全体かつ $A \otimes_k L$ が被約.

(($\Rightarrow$) は明らか. ($\Leftarrow$) は本の 6 章, 演習 2 を参照.)

系 11.13 $k[\mathbf{G}]$ がある代数的行列群の座標環と同型ならば, $\mathbf{G}$ は滑らかである. もし k が代数閉体であったなら (上の定理と 4.5 節より) 逆も成立する.

また, 11.4 節により次もいえる:

系 11.14 もし k の標数が 0 であったなら, k 上の代数的アフィン群スキームはすべて滑らかである.

この二つの系により, 大部分の代数的アフィン群スキームは滑らかであって, 滑らかでない例は正標数の体上で ($\boldsymbol{\alpha}_p$ や $\boldsymbol{\mu}_p$ などのように) アフィン代数群とは対応しないようなものに限られることが分かる.

なお, 定理 11.12 の条件は一般には A が被約であることより強い条件なので注意. 例えば次のような例がある (本の演習 10):

例 11.15 k を標数 $p > 0$ の非完全体とする. このとき, ある $b \in k$ が存在して $b \notin k^p$ となる. そのような b をとり, $\mathbf{G}_\mathrm{a} \times \mathbf{G}_\mathrm{a}$ の閉部分群スキーム $\mathbf{G}$ を関係式 $y^p = bx^p$ により定義する. その座標環を $A := k[\mathbf{G}] = k[X, Y]/(Y^p - bX^p)$ とおく. X, Y の A における像を x, y と書くことにすれば, A のホップ代数構造は $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$, $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$ で与えられる.

まず, $Y^p - bX^p$ は $k[X, Y]$ の既約多項式で, 従って A は整域である. 実際, $k(\sqrt[p]{b})[X, Y]$ において $Y^p - bX^p = (Y - \sqrt[p]{b}X)^p$ となるが, これの $p-1$ 次以下のどの因子をとっても k 係数多項式にはならない ($\sqrt[p]{b}$ の k 上最小多項式は p 次式なので, $\sqrt[p]{b}$ は $p-1$ 次以下の零でない k 係数多項式の根にはなり得ない). そして A の商体の k 上の超越次数は 1 なので, $\dim \mathbf{G} = 1$ である. しかし $I := A^+ = (x, y)$, $I^2 = (x^2, y^2, xy)$ で $\operatorname{rank} \Omega_A = \dim_k I/I^2 = 2$ となるので $\mathbf{G}$ は滑らかでないことが分かる. また $A \otimes_k \bar{k}$ は被約ではない: $(y \otimes 1 - x \otimes \sqrt[p]{b})^p = 0$.

11.7 滑らかさの代数幾何的な意味

この小節では簡単のため, k は代数閉体とする.

定義 11.16 (1) 一般に, A を可換ネーター局所環, M を A の極大イデアル, $\kappa = A/M$, d を A のクルール次元とする. A が**正則局所環 (regular local ring)** であるとは, $\dim_\kappa M/M^2 = d$ が成り立つことをいう.

(2) $S \subset k^n$ を既約な Zariski 閉集合 (アフィン代数多様体) とする. $s \in S$ と, s に対応する極大イデアル $J \subset k[S]$ をとる. S が点 s において**非特異**であるとは, 局所環 $k[S]_J$ が正則局所環であることをいう.

上記 (2) で, $k[S]$ の商体の k 上の超越次数と, $k[S]$ のクルール次元, および $k[S]_J$ のクルール次元はすべて一致する[1]. それを S の次元といい $\dim S$ と書く. さらに, S に対応する多項式環のイデアル $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ をとり, $I = (f_1, \dots, f_r)$ と書く. また, 点 s に対応する k-代数射 $\beta : k[S] \to k$ をとる ($J = \operatorname{Ker}\beta$). $\widetilde{J} := Jk[S]_J$ とおけば, 11.2 節 (d) と 11.1 節の定理により,

$$\dim_k \widetilde{J}/\widetilde{J}^2 = \dim_k J/J^2 = \dim_k(\Omega_{k[S]} \otimes_\beta k) = n - \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(s)\right)_{i,j}.$$

よって,

$$S \text{ が点 } s \text{ において非特異} \Leftrightarrow \dim_k(\Omega_{k[S]}\otimes_\beta k) = \dim S \Leftrightarrow \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(s)\right)_{i,j} = n - \dim S$$

となり, ヤコビ行列による条件と一致する.

S がアフィン代数群の場合, 11.3 節により $\Omega_{k[S]}$ は自由 $k[S]$-加群だから, どの点 $s \in S$ をとっても $\dim_k(\Omega_{k[S]} \otimes_\beta k)$ は一定である. 従って, S に対応するアフィン群スキームが非特異であるということと, S がすべての点において非特異であるということが同じ意味をもつことが分かる.

[1]M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, “Introduction to Commutative Algebra” の Theorem 11.25