

## 10 Bessel 方程式・Bessel 関数 (その2)

今回は、パラメーター  $\nu (\geq 0)$  に関する Bessel 方程式

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0 \quad (10.1)$$

の一つの標準的な解として、

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (\text{位数 } \nu \text{ の第 1 種 Bessel 関数})$$

を得て、さらに、 $\nu$  が非負整数でない場合は上記の  $\nu$  のところを  $-\nu$  に変えた  $J_{-\nu}(x)$  をとれば  $J_\nu, J_{-\nu}$  が基本解 (解全体のなすベクトル空間の基底) となることを述べたところで終わったのであった。

今回は、 $\nu$  が非負整数の場合に (10.1) の基本解がどのようにとれるのかを調べていく。前回述べたように、その場合は第8回のプリントで言うと Case 2 または Case 3 の場合にあたる。いずれの場合も、 $f_1(x) = J_\nu(x)$  と共に、

$$f_2(x) = k J_\nu(x) \log x + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (k \text{ は定数})$$

という形の解が存在して  $f_1(x), f_2(x)$  が基本解となるはずである<sup>1</sup>。

以下、 $f_2(x)$  を (10.1) に代入して、 $b_n$  の部分を具体的に求めていくことにしよう。

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= k J_\nu'(x) \log x + \frac{k J_\nu(x)}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \nu) b_n x^{n-\nu-1} \\ f_2''(x) &= k J_\nu''(x) \log x + \frac{2k J_\nu'(x)}{x} - \frac{k J_\nu(x)}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n - \nu)(n - \nu - 1) b_n x^{n-\nu-2} \end{aligned}$$

なので、 $J_\nu(x)$  が (10.1) の解であることなどに注意して計算すれば、

$$\begin{aligned} x^2 f_2''(x) + x f_2'(x) + (x^2 - \nu^2) f_2(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2kx J_\nu'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n - 2\nu) b_n x^{n-\nu} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n-\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

<sup>1</sup>なぜこのような形になるのか、ということについては、後述する「補足: 階数降下法」の部分を参照してください。

ここで、 $\nu$  が非負整数の場合は

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! (\nu+m)!}$$

であったから、

$$2kxJ'_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k(-1)^m (2m+\nu)x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu-1} m! (\nu+m)!}.$$

$\nu = 0$  の場合. この場合に (10.2) を書きなおすと

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-2} m! (m-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0$$

となる. この式の左側の級数には  $x$  の偶数べきの項しか出てこないのので, 全体として見ると奇数べきの項と偶数べきの項は様子がだいぶ異なるであろうと思われる. そこで, それぞれ別々に考えていくことにしよう.

(奇数べきの項について) まず  $n = 1$  の部分に着目すると, 真ん中の級数からしか項が出てこないのので,  $b_1 = 0$  を得る. 次に  $n = 2s + 1$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) の部分を見れば,

$$(2s+1)^2 b_{2s+1} + b_{2s-1} = 0$$

でなければならないので, これにより  $b_{2s+1} = 0$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) がわかる.

(偶数べきの項について)  $n = 2s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) の部分を見ると, 左側の級数では  $m = s$  の部分に対応するので,

$$\begin{aligned} & \frac{k(-1)^s}{2^{2s-2} s! (s-1)!} + 4s^2 b_{2s} + b_{2s-2} = 0 \\ \Leftrightarrow b_{2s} &= \frac{1}{s} \left( \frac{k(-1)^{s-1}}{2^{2s} (s!)^2} + \frac{-b_{2s-2}}{4s} \right) \end{aligned}$$

を得る. 実は,  $\nu = 0$  のときは  $b_0 = 0$  でなければならない (「補足」の最後の方を参照) ので,  $s$  に関する帰納法により

$$b_{2s} = \frac{k(-1)^{s-1}}{2^{2s} (s!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} \right)$$

となることが分かる. ここで, 記述の省略のため

$$h_s = \sum_{i=1}^s \frac{1}{i} \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば,

$$b_{2s} = \frac{k(-1)^{s-1}h_s}{2^{2s}(s!)^2} \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

と書ける.

以上より,  $\nu = 0$  の場合の (10.1) のもう一つの解として

$$f_2(x) = k \left\{ J_0(x) \log x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}h_s}{2^{2s}(s!)^2} x^{2s} \right\}$$

というものが得られた. さて,  $f_1(x), f_2(x)$  が線形独立となることだけを要求するならば,  $k$  は 0 以外の定数であれば何でも良い. しかし慣習的には, 後述する式 (10.3) を満たすため,  $k = \frac{2}{\pi}$  として, さらに  $J_0(x)$  の定数倍を少し加えて

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \left( \log \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}h_s}{2^{2s}(s!)^2} x^{2s} \right\}$$

という解をとることが多い. ここで,  $\gamma$  は Euler 定数と呼ばれる定数で,

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} (h_s - \log s) (= 0.57721566490\dots)$$

と定義される数である<sup>2</sup>. この  $Y_0(x)$  を ( $\nu = 0$  の場合の) 第 2 種 Bessel 関数と呼ぶ.

$\nu = 1, 2, 3, \dots$  の場合. この場合に (10.2) を書きなおすと

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k(-1)^m(2m+\nu)x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu-1}m!(\nu+m)!} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2\nu)b_n x^{n-\nu} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n-\nu} = 0$$

となる. 先程と同様,  $n$  が奇数の部分と偶数の部分でそれぞれ別々に考えていくことにしよう.

( $n$  が奇数の部分について) まず  $n = 1$  の部分に着目すると, 真ん中の級数からしか項が出てこないので,

$$(1 - 2\nu)b_1 = 0.$$

よって,  $b_1 = 0$  を得る. 次に  $n = 2s + 1$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) の部分を見れば,

$$(2s + 1)(2s - 2\nu + 1)b_{2s+1} + b_{2s-1} = 0$$

でなければならないので, これにより  $b_{2s+1} = 0$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) がわかる.

<sup>2</sup>余談だが, この  $\gamma$  が有理数か無理数かは未解決問題で, まだ分かっていない (超越数なのではないかと予想されている).

( $n$  が偶数の部分について) まず,  $n = 2s$  ( $s = 1, \dots, \nu - 1$ ) の部分を考える (ただし,  $\nu = 1$  のときはこの場合を飛ばして次の  $n = 2\nu$  の部分に進む). すると,

$$4s(s - \nu)b_{2s} + b_{2s-2} = 0 \Leftrightarrow b_{2s} = \frac{b_{2s-2}}{4s(\nu - s)}$$

となつて,

$$b_{2s} = \frac{(\nu - s - 1)!b_0}{2^{2s}s!(\nu - 1)!}$$

を得る.

次に,  $n = 2\nu$  のところを考えると, 左側の級数では  $m = 0$  の部分に対応するので,

$$\frac{k\nu}{2^{\nu-1}\nu!} + b_{2\nu-2} = \frac{k}{2^{\nu-1}(\nu - 1)!} + \frac{b_0}{2^{2\nu-2}\{(\nu - 1)!\}^2} = 0.$$

従つて,  $b_0 = -k2^{\nu-1}(\nu - 1)!$  でなければならないことが分かる. これをもとに先程の  $b_{2s}$  を書き直しておこう:

$$b_{2s} = -\frac{k(\nu - s - 1)!}{2^{2s-\nu+1}s!} \quad (s = 0, \dots, \nu - 1).$$

次に,  $n = 2s + 2\nu$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) のところを考える. 左側の級数では  $m = s$  の部分に対応するので,

$$\begin{aligned} & \frac{k(-1)^s(2s + \nu)}{2^{2s+\nu-1}s!(s + \nu)!} + 4s(s + \nu)b_{2s+2\nu} + b_{2s+2\nu-2} = 0 \\ \Leftrightarrow b_{2s+2\nu} &= \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \nu} \right) \left\{ \frac{k(-1)^{s-1}}{2^{2s+\nu+1}s!(s + \nu)!} - \frac{b_{2s+2\nu-2}}{4(2s + \nu)} \right\} \end{aligned}$$

を得る.  $b_{2\nu}$  は適当にとって良いので,

$$b_{2\nu} = -\frac{kh_\nu}{2^{\nu+1}\nu!}$$

とすることにしよう. すると,  $s$  に関する帰納法により

$$b_{2s+2\nu} = \frac{k(-1)^{s-1}(h_s + h_{s+\nu})}{2^{2s+\nu+1}s!(s + \nu)!} \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

(ここで,  $h_0 = 0$  とした) となることが分かる.

以上より, (10.1) のもう一つの解として

$$f_2(x) = k \left\{ J_\nu(x) \log x - x^{-\nu} \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - s - 1)!}{2^{2s-\nu+1}s!} x^{2s} + x^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}(h_s + h_{s+\nu})}{2^{2s+\nu+1}s!(s + \nu)!} x^{2s} \right\}$$

というものが得られた.  $k$  は基本的には 0 でない定数であればなんでも良いが, 先程と同様 (10.3) を満たすため, 慣習的に  $k = \frac{2}{\pi}$  として, さらに  $J_\nu(x)$  の定数倍を少し加えて

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \left( \log \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{x^{-\nu}}{\pi} \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-s-1)!}{2^{2s-\nu} s!} x^{2s} + \frac{x^\nu}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} (h_s + h_{s+\nu})}{2^{2s+\nu} s! (s+\nu)!} x^{2s}$$

という解をとることが多い. これもやはり第 2 種 Bessel 関数と呼ばれる.

一般の  $\nu$  に対する第 2 種 Bessel 関数. 以上ですべての場合についての基本解を得ることができたわけだが,  $\nu$  が非負整数でない場合にも第 2 種 Bessel 関数をうまく定義することによって, 一般の  $\nu$  に対する (10.1) の基本解をもう少し統一的に記述することができる.

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) \quad (\nu \geq 0, \nu \notin \mathbb{Z})$$

とおくと, これは  $J_\nu$  と  $J_{-\nu}$  の線形結合だから, やはり (10.1) の解となる. これをまた (非負整数でない  $\nu$  に対する) 第 2 種 Bessel 関数という. 実は, 非負整数  $n$  に対し,  $\nu \rightarrow n$  とすると  $Y_\nu(x)$  は  $Y_n(x)$  に収束する:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x). \quad (10.3)$$

従って, (10.1) の基本解としては  $J_\nu, J_{-\nu}$  をとるよりも,  $J_\nu, Y_\nu$  をとった方が, すべての  $\nu$  に対して適用できる統一的な一般解の記述が可能となる.

**定理 10.1** すべての  $\nu \geq 0$  に対し, Bessel 方程式 (10.1) の一般解は,

$$f(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

と書ける.

**演習 10.2**  $J_\nu(x)$  ( $\nu \geq 0$ ) に関して, 次の関係式が成立することを示せ. ただし, 下記で,  $\nu = 0$  のときは  $J_{\nu-1}(x) = J_{-1}(x) := -J_1(x)$  とおく.

- (1)  $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ .
- (2)  $(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$ .
- (3)  $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$ .
- (4)  $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$ .

## 補足：階数降下法

第8回のプリントで、「Case 2 や Case 3 の場合は基本解がこれこれこのように出てくる」と結果だけを書いたが、なぜそのようになるのかは階数降下法と呼ばれるテクニックを用いることにより分かる。

一般に、2階線形微分方程式のひとつの解  $f_1(x)$  が分かっているときに、 $f_2(x) = f_1(x)g(x)$  とおいてこれをもとの方程式に代入すると、うまく方程式を変形することができて、 $g'(x)$  に関する1階の微分方程式に問題が帰着してしまう、ということがある。それを使ってもうひとつの解  $f_2(x)$  を求めるのが階数降下法である。ここでは  $\nu$  が非負整数の場合の Bessel 方程式 (10.1) を例にとって、この手法を説明しよう。

$\nu$  が非負整数のとき、既に得られている (10.1) のひとつの解  $f_1(x) = J_\nu(x)$  を使って、もうひとつの解  $f_2(x)$  が

$$f_2(x) = J_\nu(x)g(x)$$

という形をしていると仮定して、 $g(x)$  が満たすべき条件を考える。

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= J_\nu'(x)g(x) + J_\nu(x)g'(x), \\ f_2''(x) &= J_\nu''(x)g(x) + 2J_\nu'(x)g'(x) + J_\nu(x)g''(x) \end{aligned}$$

なので、 $f_2(x)$  を (10.1) に代入すると、 $g(x)$  がかかっている部分は 0 となり ( $J_\nu(x)$  が (10.1) の解であることに注意)、

$$\begin{aligned} x^2 f_2''(x) + x f_2'(x) + (x^2 - \nu^2) f_2(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 J_\nu''(x)g''(x) + (xJ_\nu'(x) + 2x^2 J_\nu'(x))g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで  $y = g'(x)$  とおくと、

$$\begin{aligned} x^2 J_\nu(x) \frac{dy}{dx} + (xJ_\nu(x) + 2x^2 J_\nu'(x))y &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= - \left( \frac{1}{x} + 2 \frac{J_\nu'(x)}{J_\nu(x)} \right) \quad (\text{変数分離形}) \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy &= - \int \left( \frac{1}{x} + 2 \frac{J_\nu'(x)}{J_\nu(x)} \right) dx \\ \Leftrightarrow \log y &= -(\log x + 2 \log(J_\nu(x))) + C \quad (C : \text{定数}) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{C'}{xJ_\nu(x)^2} \quad (C' = e^C : \text{定数}). \end{aligned}$$

ということで、 $g(x)$  はこの  $y$  の原始関数としてとれば良い。しかし、このまま不定積分をとっても考えづらいので、ここでベキ級数一般で成立する次の定理を用いる：

定理 10.3 ベキ級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  について, もし  $a_0 \neq 0$  であれば, ある別のベキ級数

$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$  ( $\tilde{a}_0 \neq 0$ ) が存在して, 次を満たす:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n \right) = 1.$$

[証明]

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i \tilde{a}_{n-i} \right) x^n$$

なので,

$$\sum_{i=0}^n a_i \tilde{a}_{n-i} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

となるように  $\tilde{a}_n$  たちをとることができればよい.  $n=0$  の場合は  $a_0 \tilde{a}_0 = 1$  となればよいから,  $\tilde{a}_0 = \frac{1}{a_0}$  とする (ここで  $a_0 \neq 0$  という条件を用いている).  $n=1$  の場合,

$$a_0 \tilde{a}_1 + a_1 \tilde{a}_0 = 0$$

となればよいので,  $\tilde{a}_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}$  とする. このようにして下の番号から順番に  $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \dots$  を決めていくことができる.  $\square$

さて,  $xJ_\nu(x)^2$  を考えると, これは

$$xJ_\nu(x)^2 = x^{2\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$

という形をしているはずである<sup>3</sup>. そこで, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  に対し, 上の定理の  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$  をとれば,

$$\frac{1}{xJ_\nu(x)^2} = x^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n-2\nu-1} \quad (\tilde{a}_0 \neq 0)$$

となるはずである.  $g(x)$  はこれの ( $C'$  倍の) 原始関数となるようにとれば良いので,

$$g(x) = C' \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n F_n(x) + B \quad (C', B : \text{定数}), \quad F_n(x) = \begin{cases} \log x & (n=2\nu) \\ \frac{1}{n-2\nu} x^{n-2\nu} & (n \neq 2\nu). \end{cases}$$

<sup>3</sup> $J_\nu(x)$  の定義から  $a_n$  を具体的に求めることもできますが, ここでそれをやってもあまり益はないと思います.

すなわち,

$$g(x) = C' \left\{ \tilde{a}_{2\nu} \log x + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2\nu}}^{\infty} \frac{\tilde{a}_n}{n-2\nu} x^{n-2\nu} \right\} + B \quad (C', B : \text{定数}).$$

ここで,

$$k = C' \tilde{a}_{2\nu}, \quad J_\nu(x) \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2\nu}}^{\infty} \frac{C' \tilde{a}_n}{n-2\nu} x^{n-2\nu} = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

とおけば,  $f_2(x) = J_\nu(x)g(x)$  が次のように得られる:

$$f_2(x) = k J_\nu(x) \log x + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + B J_\nu(x) \quad (k, B : \text{定数}).$$

最後の部分は結局  $J_\nu(x)$  の定数倍を足しているだけなので, 定数  $B$  はなんでも良い ( $B = 0$  でもよい). また,  $\nu = 0$  のときは, 上記の  $b_n$  の決め方から,  $b_0 = 0$  でなければならぬ.