9 Bessel 方程式・Bessel 関数 (その 1)

パラメーター ν (≥ 0) を含む次の微分方程式:

$$x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - \nu^2)f(x) = 0 \tag{9.1}$$

を **Bessel 方程式**という. これを前回学んだ Frobenius の方法で解いてみよう.

$f(x)$ が

$$f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha+n} \quad (c_0 \neq 0)$$

という形をしていると仮定すると,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n x^{\alpha+n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n x^{\alpha+n-2}$$

となるから, 方程式 (9.1) を書き直すと,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha+n+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha+n} = 0 \tag{9.2}$$

となる. まず, この式の x^α の項に注目すると, 決定方程式は

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - \nu^2 = (\alpha-\nu)(\alpha+\nu) = 0$$

となり, その解は $\alpha_1 = \nu$, $\alpha_2 = -\nu$ である. 従って, もし ν が $1/2 \times$ (整数) という形でなければ $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu \notin \mathbb{Z}$ となるので, 前回の分類でいうと Case 1 となる. そしてもし $\nu = 0$ ならば Case 2 となり, $\nu = 1/2 \times$ (自然数) という形ならば Case 3 となる. いずれの場合も $x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ($c_0 \neq 0$) という形の解は持つはずなので, まずそれを求めてみよう.

式 (9.2) において $\alpha = \nu$ とすると, $x^{\nu+1}$ の項は

$$\{(\nu+1)\nu + (\nu+1) - \nu^2\}c_1 = (2\nu+1)c_1 = 0$$

とならなければならないので, $c_1 = 0$. また, $x^{\nu+n}$ ($n \geq 2$) の項は,

$$\{(\nu+n)(\nu+n-1) + (\nu+n) - \nu^2\}c_n + c_{n-2} = n(2\nu+n)c_n + c_{n-2} = 0$$

とならなければならないので,

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{n(2\nu+n)} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を得る. $c_1 = 0$ なので, n が奇数ならば $c_n = 0$ でなければならない. 一方, n が偶数の場合は, $n = 2m$ とすると,

$$c_{2m} = \frac{-c_{2(m-1)}}{2m(2\nu+2m)} = \frac{-c_{2(m-1)}}{2^2 m(\nu+m)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

だから, c_0 を使って書けば,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m!(\nu+m)\cdots(\nu+1)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{9.3}$$

となる.

ν が非負整数であった場合, $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \nu!}$ となるような解が標準的で, その場合は

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!(\nu+m)!} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となり, Bessel 方程式 (9.1) のひとつの標準的な解

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!(\nu+m)!}$$

が得られる.

ガンマ関数. ν が非負整数でない場合は, 上記の $(\nu+m)!$ の部分がちゃんと意味を持つように, 階乗を拡張する必要がある. それには次で定義する**ガンマ関数**を用いる[1]:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad (s > 0).$$

部分積分法により, この関数は

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = \left[-e^{-t} t^s\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = s\Gamma(s)$$

を満たす. また,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

[1]積分がよく分からない人は, 式を全部理解できなくてもかまいません. とりあえず, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$ を満たす関数 $\Gamma(s)$ が (階乗の拡張として) 一般的に定義できるという事だけ踏まえておいてください.

となるので, これと上の関係式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を合わせれば, s が非負整数の場合は

$$\Gamma(s+1) = s! \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

となり, $\Gamma(s+1)$ が階乗の拡張になっていることが分かる. さらに, s が整数でない負の値のときも, 関係式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を満たすように $\Gamma(s)$ の定義を拡張することができる. すなわち, $-s$ を超えない最大の整数を n とするとき,

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)} \quad (s < 0,\ s \notin \mathbb{Z})$$

とすればよい.

第 1 種 Bessel 関数. 式 (9.3) に戻って考えると, ガンマ関数を使えば,

$$\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

だから, $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ となる場合を考えると,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となり, 一般の ν についても, Bessel 方程式 (9.1) のひとつの標準的な解

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

が得られる[2]. これを, 位数 ν の**第 1 種 Bessel 関数**と呼ぶ.

ν が非負整数でない場合 ($\nu \notin \mathbb{Z}$), 式 (9.2) において $\alpha = -\nu$ として同様に考えていけば,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\nu}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(-\nu+m+1)}$$

という別の解を得る. そしてこの場合, $J_\nu(x), J_{-\nu}(x)$ は線形独立となり, これらが Bessel 方程式 (9.1) の基本解をなす. ($\nu = 1/2 \times$ (奇数) の場合は Case 3 だが $k = 0$ ということになる.)

ν が非負整数の場合は Case 2 や Case 3 (で $k \neq 0$) となるので, また別の基本解をとる必要がある. それについてはまた次回に考えることにする.

演習 9.1 ガンマ関数の性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, および $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いて,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

となることを示せ.

[2] この級数はすべての実数 x に対して収束し, ちゃんと意味のある関数となる.