8 Frobenius の方法

次回に学ぶ Bessel (ベッセル) 方程式などの微分方程式[1]は, べき級数を少し拡張した

$$f(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 \neq 0)$$

(α は自然数とは限らない数) という形の解をもつことがある. このような形の解を探すことから出発する微分方程式の解法を, Frobenius (フロベニウス) の方法という.

ここでは,

$$x^2 S(x) f''(x) + xR(x) f'(x) + Q(x) f(x) = 0 \tag{8.1}$$

($S(x), R(x), Q(x)$ は多項式[2], ただし $S(0) \neq 0$) というタイプの方程式を解くことを考える. ここで, $S(x), R(x), Q(x)$ は, 低次の項から順番に書くとき, それぞれ

$$\begin{aligned} S(x) &= s_0 + s_1 x + \cdots \quad (s_0 \neq 0) \\ R(x) &= r_0 + r_1 x + \cdots \\ Q(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots \end{aligned}$$

と書かれているとする.

$f(x)$ が

$$f(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha+n} \quad (c_0 \neq 0)$$

という形をしていると仮定すると,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n x^{\alpha+n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n x^{\alpha+n-2}$$

となるから, 与えられた方程式 (8.1) を書き直すと,

$$(s_0 + s_1 x + \cdots)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n x^{\alpha+n} + (r_0 + r_1 x + \cdots)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)c_n x^{\alpha+n}$$
$$+ (q_0 + q_1 x + \cdots)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\alpha+n} = 0$$

[1] 一般には, 確定特異点型と呼ばれるタイプの微分方程式

[2] もっと一般には, 多項式に限らず ($x = 0$ のまわりで収束する) べき級数であったとしてもよい.

となる．そして, この式の $x^\alpha, x^{\alpha+1}, x^{\alpha+2}, \ldots$ の項をまとめて, 各項の係数が 0 になるための条件を考えればよい．ここで特に, x^α の項に注目する．$c_0 \neq 0$ としていたから, x^α の項の係数が 0 になるための条件は, α に関する 2 次方程式:

$$s_0\alpha(\alpha-1) + r_0\alpha + q_0 = 0 \tag{8.2}$$

となる．この 2 次方程式を, 微分方程式 (8.1) の**決定方程式**という．実は, (8.2) の解の様子に応じて (8.1) の基本解の形がだいぶ異なってくる．分類すると, 次の 3 つの場合がある:

- Case 1: (8.2) が異なる 2 つの解 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ をもち, さらに, $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ となる.
- Case 2: (8.2) が重解をもつ.
- Case 3: (8.2) が異なる 2 つの解 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ をもち, さらに, $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ となる.

Case 1: (8.2) が異なる 2 つの解 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ をもち, さらに, $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ となる場合, (8.1) は次の形の基本解をもつ:

$$f_1(x) = x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2(x) = x^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Case 2: (8.2) が重解をもつ場合, それは $\alpha = \dfrac{s_0 - r_0}{2s_0}$ となるはず．このとき, (8.1) は次の形を基本解をもつ:

$$f_1(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2(x) = f_1(x)\log x + x^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

(ここで, log は自然対数を表わす．以下同様.)

Case 3: (8.2) が異なる 2 つの解 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ をもち, さらに, $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ となる場合, 必要なら α_1, α_2 を入れ替えて $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ となるようにしておくと, (8.1) は次の形の基本解をもつ:

$$f_1(x) = x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f_2(x) = kf_1(x)\log x + x^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

(ここで, k は適当な定数.)

演習 8.1 微分方程式

$$2x^2 f''(x) - 5xf'(x) - 4f(x) = 0$$

の基本解を求めよ．(これは, Euler-Cauchy 方程式と呼ばれる微分方程式の一種.)