7 Legendre の方程式・Legendre 多項式

実を言うと, 前回の例や演習で解いた微分方程式にはべき級数法よりも簡単な解法が存在する (変数分離や, 行列の対角化など). ただ, 応用上重要な微分方程式にはべき級数法が必要となるものがあり, 有名なものには名前が付いている. そのうちの 1 つが今回紹介する Legendre (ルジャンドル) の方程式である:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0.$$

ここで, n はパラメータとして与えられた実数とする.

早速, $f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s$ とおいて解いてみよう.

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{\infty} sc_s x^{s-1}, \quad f''(x) = \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)c_s x^{s-2}$$

を上の式に代入すれば,

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)c_s x^{s-2} - 2x\sum_{s=1}^{\infty} sc_s x^{s-1} + n(n+1)\sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)c_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)c_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2sc_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} n(n+1)c_s x^s = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2c_2 + n(n+1)c_0) + (6c_3 - 2c_1 + n(n+1)c_1)x \\
& \qquad + \sum_{n=2}^{\infty}\{(s+2)(s+1)c_{s+2} - s(s-1)c_s - 2sc_s + n(n+1)c_s\}x^n = 0.
\end{aligned}$$

よって, $f(x)$ が方程式を満たすための条件は,

$$\begin{cases}
2c_2 + n(n+1)c_0 = 0 \\
6c_3 + (-2 + n(n+1))c_1 = 0 \\
(s+2)(s+1)c_{s+2} + (-s(s-1) - 2s + n(n+1))c_s = 0 \quad (s = 2, 3, 4, \ldots)
\end{cases}$$

となる. $-s(s-1) - 2s + n(n+1) = (n-s)(n+s+1)$ などに注意して上記を整理すると,

$$c_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}c_s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

を得る. 従って, Legendre の方程式の一般解は,

$$f(x) = c_0 f_1(x) + c_1 f_2(x) \quad (c_0, c_1 \text{ は任意定数}),$$

ただし,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots \\ f_2(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots \end{aligned}$$

として得られる[1].

Legendre 多項式. 上記で, n が非負整数の場合, $c_{n+2} = 0$, $c_{n+4} = 0$, ..., となるので, もし n が偶数なら $f_1(x)$ が n 次の多項式となり, n が奇数なら $f_2(x)$ が n 次の多項式となる. このような場合に Legendre の方程式を満たす多項式のことを **Legendre 多項式**という. 特に, 最高次の係数 c_n が,

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

であるような多項式解が標準的で, それを $P_n(x)$ と書く.

$$c_{s-2} = -\frac{s(s-1)}{(n-s+2)(n+s-1)} c_s \quad (n \geq s \geq 2)$$

だから, c_n から順に $c_{n-2}, c_{n-4}, \ldots$ を求めていけば, $P_n(x)$ を具体的に計算することができる. 例えば,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ &\cdots \end{aligned}$$

演習 7.1 (1) $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$ を具体的に計算せよ.

(2) 一般に,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

となることを示せ. ここで, $[n/2]$ は $n/2$ を超えない最大の整数とする.

[1] なお, これらの級数は $|x| < 1$ の範囲で収束して, この範囲で定義された関数として意味を持つ.