6 べき級数による微分方程式の解法

前回までの演習の中で, 微分方程式の解を多項式の中から求める, ということを少し考えたが, 一般には微分方程式の解は多項式になるとは限らない. 実際, 「微積分」の授業では,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \end{aligned}$$

などを解とする微分方程式について学んだと思う. そこで, この節では, 解が

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

($c_0, c_1, c_2, \ldots$ は定数) という形 をしていると仮定して微分方程式を解くことを考える. 上の形の式を「べき級数」と呼ぶので, そのような解法をべき級数法という.

$f'(x)$ や $f''(x)$ は, 多項式の場合と同様に項別に,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (c_0)' + (c_1 x)' + (c_2 x^2)' + (c_3 x^3)' + \cdots \quad = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n, \\ f''(x) &= (c_1)' + (2c_2 x)' + (3c_3 x^2)' + (4c_4 x^3)' + \cdots \quad = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n \end{aligned}$$

と計算して, 与えられた微分方程式を各 x^n の項ごとにまとめて c_n たちが満たすべき条件を調べる. 実際に具体例を見ていった方が早く要領をつかめると思う:

例 6.1 微分方程式 $f'(x) - f(x) = 0$ を解いてみる. まず,

$$f'(x) - f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)c_{n+1} - c_n\}x^n = 0.$$

上記で, 各 x^n の係数が 0 になるための条件は,

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

つまり, $c_1 = c_0, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{c_0}{n!}$ となって,

$$f(x) = c_0 + c_0 x + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{3!}x^3 + \cdots \quad = c_0 \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \right) = c_0 e^x.$$

c_0 は何であっても $f(x) = c_0 e^x$ とすれば最初の微分方程式が満たされるので, 一般解として

$$f(x) = c_0 e^x \quad (c_0 \text{ は任意定数})$$

が得られる. (前回までの言葉でいうと, 解全体が 1 次元のベクトル空間をなし, e^x がその基底 (基本解) になっている.)

$f(0) = c_0$ なので, あらかじめ初期値 $f(0)$ が分かっていれば, c_0 の部分も特定されて唯一つの解が求まる. 例えば, 初期値が $f(0) = 3$ であったとすると, 解は $f(x) = 3e^x$ となる.

例 6.2 微分方程式 $f''(x) + f(x) = 0$ を解く.

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\} x^n = 0.$$

各 x^n の係数が 0 になるための条件は,

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

つまり, $c_2 = -\frac{c_0}{2}, \quad c_3 = -\frac{c_1}{3 \cdot 2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4!}, \quad c_5 = -\frac{c_3}{5 \cdot 4} = \frac{c_1}{5!}, \quad \ldots,$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}, \quad c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}$$

となって,

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_1}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 + \frac{c_1}{5!}x^5 - \cdots \\ &= c_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \right) + c_1 \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \right) \\ &= c_0 \cos x + c_1 \sin x. \end{aligned}$$

c_0, c_1 は任意で良いので, 一般解として

$$f(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x \quad (c_0, c_1 \text{ は任意定数})$$

が得られる. (解全体が 2 次元のベクトル空間をなし, $\cos x, \sin x$ がその基底 (基本解) になっている.)

$f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$ なので, 初期値 $f(0)$ と $f'(0)$ が分かっていれば, c_0, c_1 の部分も特定されて唯一つの解が求まる. 例えば, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ なら解は $f(x) = \cos x$ となり, また, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ なら解は $f(x) = \sin x$ となる.

例 6.3 微分方程式 $f'(x) - 4xf(x) = 0$ を解く.

$$\begin{aligned}
f'(x) - 4xf(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\right) - 4x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+1}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} 4c_{n-1} x^{n}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\{(n+1)c_{n+1} - 4c_{n-1}\}x^n = 0.
\end{aligned}$$

各 x^n の係数が 0 になるには,

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = \frac{4c_{n-1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となればよい. つまり, $c_1 = 0, \quad c_2 = 2c_0, \quad c_3 = \dfrac{4c_1}{3} = 0, \quad c_4 = c_2 = \dfrac{2^2 c_0}{2}, \quad \dots,$

$$c_{2n} = \frac{4c_{2n-2}}{2n} = \frac{2c_{2(n-1)}}{n} = \cdots = \frac{2^n c_0}{n!}, \quad c_{2n+1} = 0,$$

となって,

$$f(x) = c_0 + 2c_0 x^2 + \frac{2^2 c_0}{2}x^4 + \frac{2^3 c_0}{3!}x^6 + \cdots = c_0\left(1 + (2x^2) + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + \frac{1}{3!}(2x^2)^3 + \cdots\right) = c_0 e^{2x^2}.$$

c_0 は任意で良いので, 一般解として

$$f(x) = c_0 e^{2x^2} \quad (c_0 \text{ は任意定数})$$

が得られる.

演習 6.4 次の微分方程式をべき級数法で解け.

(1) $(1+x)f'(x) - f(x) = 0$
(2) $f'(x) + f(x) = 0$
(3) $f''(x) + 9f(x) = 0$