4　ベクトル空間とその次元 (続き)

定理 4.6 V を有限次元ベクトル空間, $n = \dim V$ とし, $v_1, \ldots, v_n$ を V の基底とする. このとき, V のすべての元は $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ $(c_1, \ldots, c_n \in K)$ という形で書き表すことができる:

$$V = \{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \mid c_1, \ldots, c_n \in K\}.$$

[証明] 任意の $v \in V$ をとる. n は線形独立となる V の元の組の最大個数だから, $n+1$ 個の組 $v_1, \ldots, v_n, v$ は線形従属となるはず. よって, ある $a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ が存在して, $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}v = \mathbf{0}$ かつ $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ となる. このとき, もし $a_{n+1} = 0$ とすると, $v_1, \ldots, v_n$ の線形独立性から $a_1 = \cdots = a_n = 0$ であることになってしまい上記に反するので, $a_{n+1} \neq 0$ である. 従って, $v = -(a_1/a_{n+1})v_1 - \cdots - (a_n/a_{n+1})v_n$. □

前回から抽象的にベクトル空間を定義してきたので, 多項式のような「矢印」のイメージとは結びつかないものも「ベクトル」の概念に含めてしまったわけであるが, 有限次元のベクトル空間の元は, 基底を使って数ベクトルと同一視することにより, 図形的なイメージを持たせることができる:

$$V \ni c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

5　線形写像とその行列表現

前節と同様に, K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし, スカラーの全体とする.

定義 5.1 U, V を 2 つのベクトル空間, $\varphi : U \to V$ を U から V への写像とする[1] φ が**線形写像**であるとは, すべての $u, v \in U$ と $c \in K$ に対して

(i) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

(ii) $\varphi(cu) = c\varphi(u)$

が成り立つことをいう. 特に, $U = V$ のときは線形写像のことを**線形変換** (あるいは 1 **次変換**) という.

[1] U の各元に対して V の元がそれぞれ決まる対応関係が定まっているとき, それを U から V への写像という.

例 5.2 (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とするとき, $\varphi : K^2 \to K^2$ を $\varphi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ により定めれば, φ は線形変換となる.

(2) $K[x]$ の中で, n 次以下の多項式全体を $K[x]_n$ と書くことにすると, これは $K[x]$ の有限次元な部分空間となる ($\dim K[x]_n = n+1$, 基底として $1, x, \ldots, x^n$ がとれる). $n \geq 1$ のとき, $\varphi : K[x]_n \to K[x]_{n-1}$ を $\varphi(f(x)) = f'(x)$ により定めると, これは線形写像となる.

U, V が有限次元の場合を考える. $n = \dim U$, $m = \dim V$ とし, $u_1, \ldots, u_n \in U$ が U の基底, $v_1, \ldots, v_m \in V$ が V の基底であったとする. ここで線形写像 $\varphi : U \to V$ が与えられたとき, $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ に対して, 定理 4.6 により,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(u_1) & = & a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m \\ & \vdots & \\ \varphi(u_n) & = & a_{1n}v_1 + \cdots + a_{mn}v_m \end{array}$$

となる $a_{ij} \in K$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ が存在する. これを略記して,

$$(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)) = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表すこともある. ここに出てくる行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を, φ の (U の基底 $u_1, \ldots, u_n$ と V の基底 $v_1, \ldots, v_m$ に関する) **表現行列**と呼ぶ.

例 5.3 (1) 例 5.2 (1) の φ について, K^2 の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めてみる.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & = & a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 \\ \varphi(\boldsymbol{e}_2) & = & a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{array}$$

だから, A が φ の表現行列そのものである.

(2) 例 5.2 (2) の φ について, $K[x]_2$ の基底 $1, x, x^2$ と $K[x]_1$ の基底 $1, x$ に関する表現行列を求めてみる.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(1) & = & 0 \cdot 1 + 0x \\ \varphi(x) & = & 1 \cdot 1 + 0x \\ \varphi(x^2) & = & 0 \cdot 1 + 2x \end{array}$$

だから, φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる. つまり, 略記法で書けば,

$$(\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)) = (1, x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

演習 5.4 (1) $\varphi : K[x]_2 \to K[x]_2$ を $\varphi(f(x)) = f''(x) - 2xf'(x) + 4f(x)$ により定めると, これは $K[x]_2$ の線形変換となることを確かめよ. そして, $K[x]_2$ の基底 $1, x, x^2$ に関する φ の表現行列を求めよ.

(2) (1) で求めた表現行列を A とする. K^3 の部分空間 W_1 を

$$W_1 = \{\boldsymbol{v} \in K^3 \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

により定める. 図形的に K^3 を 3 次元空間と同一視したとき, W_1 は 2 つの平面の交わりとして, 直線になることを確かめよ.

(3) $K[x]_2$ の部分空間 W_2 を

$$W_2 = \{f(x) \in K[x]_2 \mid f''(x) - 2xf'(x) + 4f(x) = 0\}$$

により定める. $\dim W_2 = 1$ を示せ. (前回最後の問題と同様ですが, (2) と比較すると, 前とは少し違って見えると思います.)