3　ベクトル積 (外積)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする. このとき, 次の条件 (i)(ii) を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の ベクトル積(または 外積) といい, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書く:

(i) $\boldsymbol{x}$ の大きさは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい[1]

(ii) $\boldsymbol{x}$ の向きは, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 両方に直交し, さらに, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ がこの順序で右手系をなすような向きである.

すると, ベクトル積の性質として, 反対称性や 2 重線形性 (双線形性ともいう) が成立する[2]:

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

(3) 任意の実数 r に対し, $(r\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (r\boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

また, 前回考えた符号付き体積 $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ とは次のような関係がある:

(4) $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ については, 次が成り立つ:

(5) $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$.

演習 3.1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とするとき, 上記の性質を用いて,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3$$

となることを示せ.

演習 3.2 4 点 $(1,1,2)$, $(5,4,1)$, $(3,-5,-1)$, $(2,-2,1)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

[1] 面積が 0 の場合 ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行, または, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらかが $\boldsymbol{0}$ の場合) は, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする.

[2] (1)(3) は定義から容易に分かる. (2) はそれほど明らかでないので, 次の (4) と合わせて講義で詳しく説明する.