2 面積・体積と行列式

2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の「符号つき」面積 $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を次のように定める.

- $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \pm$(平行四辺形の面積),
- 正負の符号は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の位置関係—右手系をなすか左手系をなすか—により決める[1]. 右手系なら $+$, 左手系なら $-$ とする.

さて, 少し考えると, この符号つき面積は次のような性質をもつことが分かる:

(1) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

(2) $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$. 特に, 2 つの同じベクトルに対しては $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$.

(3) $S(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$.

(4) 任意の実数 r に対し, $S(r\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = rS(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{b})$.

上記の (2) のような性質は <u>反対称性</u> と呼ばれる (交代性, または歪対称性ということもある). また, (3)(4) を合わせて <u>2 重線形性</u> という. これらの性質を用いると, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は次のように計算することができる:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= S(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) = a_1 S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}) + a_2 S(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}) \\ &= a_1 S(\boldsymbol{e}_1, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) + a_2 S(\boldsymbol{e}_2, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \underbrace{S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}_{1} + a_2 b_1 \underbrace{S(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)}_{-1} + a_2 b_2 \underbrace{S(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}_{0} \\ &= a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{aligned}$$

線形代数ではこの $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を, 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の <u>行列式</u> と呼び, 記号 $|...|$ や $\det(...)$ を使って表す:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

[1] 右手の手の平を自分に向けて開き, 手を裏返さず指も交差させずに親指を $\boldsymbol{a}$ の方向, 人差指を $\boldsymbol{b}$ の方向に向けることができたら右手系 (親指と人差し指は 180 度未満なら開くことが可能で, 180 度以上は開くことが不可能であるとする), 左手でそれができるなら左手系ということにします. ただ, 一般的にはあまり用いられていない言葉の使い方なので, とりあえずこの授業だけのルールとします.

今度は, 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行六面体の「符号つき」体積 $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を次のように定める.

- $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm$(平行六面体の体積),
- 正負の符号は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系をなすなら $+$, 左手系なら $-$ とする.

すると, 平面の時より少し複雑になるが, 同様に考えて, この符号つき体積は次のような性質をもつことが分かる:

(1) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のうちどこか 2 つを入れ替えると $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の符号は逆転する. 例えば $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -V(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. 特に, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のうちどれか 2 つが一致するなら $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$.

(3) $V(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c})$, $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}') = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}')$.

(4) 任意の実数 r に対し, $V(r\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, r\boldsymbol{c}) = rV(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

前と同様, (2) は反対称性と呼ばれる. また, (3)(4) は合わせて 3 重線形性 という.

演習 2.1 上記を用いて $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を前と同様に計算し,

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

となることを示せ.

この $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を, 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の 行列式 と呼び, やはり記号 $|...|$ や $\det(...)$ を使って表す:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3.$$