演習問題

※線形代数続論演習の授業をとってない人もいるようなので, 期末試験前にいくつか演習問題を挙げておきます. これらの演習問題の解答は６月２７日 (月) に次のページにアップロードします (土日にやってみて, 月曜に答え合わせ, という感じで使ってみてください):

http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2011-1/ad-linear/index.html

---

K を実数全体 $\mathbb{R}$ または複素数全体 $\mathbb{C}$ とする.

演習 0.1 $K[X]$ を K 係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間とする.

(1) $K[X]$ の 3 つの元 $1+X$, $X-X^3$, $1+X^3$ で生成される部分空間 $\langle 1+X, X-X^3, 1+X^3\rangle$ の次元を求めよ.

(2) $\langle 1+X, X+X^3, 1+X^3\rangle$ の次元を求めよ.

演習 0.2 (1) $\mathbb{R}^3$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ および $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ を次のように与える:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ \boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, 基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ への基底の変換行列を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ と $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を次のように与える:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\ ;\ \boldsymbol{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, 基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ への基底の変換行列を求めよ.

(3) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{v}_1$ により定義する. このとき, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ および $\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(4) 基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ および $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

演習 0.3 $K[X]_n$ を n 次以下の多項式全体からなる $K[X]$ の部分空間とする. 線形写像 $f : K[X]_2 \to K[X]_3$ を

$$f(a+bX+cX^2) = (a+b+c) + (a-b-c)X + 2aX^2 + (3a+b+c)X^3 \quad (a, b, c \in K)$$

により定義する.

(1) $K[X]_2$ の基底 $\{1, X, X^2\}$ および $K[X]_3$ の基底 $\{1, X, X^2, X^3\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) $\operatorname{Ker} f$ の基底を 1 組求めよ.

(3) $\operatorname{Im} f$ の基底を 1 組求めよ.

(4) $\operatorname{rank} f + \operatorname{null} f = \dim K[X]_2$ を確かめよ.

演習 0.4 U, V をベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とする.

(1) f が単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ を示せ.

(2) U, V が有限次元であったとする. $\dim U = m$, $\dim V = n$ とし, U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ および V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f の表現行列を A とする. また, 線形写像 $L_A : K^m \to K^n$ を $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める. このとき, $\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Ker} L_A$ が同型であることを示せ.

(3) 上記で, さらに $\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Im} L_A$ も同型であることを示せ.

演習 0.5 次のエルミート行列 (実対称行列) をユニタリ行列 (直交行列) によって対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-1} & 1 \\ \sqrt{-1} & 2 & -\sqrt{-1} \\ 1 & \sqrt{-1} & 2 \end{pmatrix}$