演習問題の解答例

演習 0.1 (1) $1+X, X-X^3$ は線形独立であるが, $1+X, X-X^3, 1+X^3$ は線形従属である:

$$(1+X)-(X-X^3)-(1+X^3)=0.$$

従って (教科書の系 6.3 により) $\{1+X, X-X^3\}$ が $\langle 1+X, X-X^3, 1+X^3\rangle$ の基底となる. よって次元は 2.

(2) $c_1, c_2, c_3 \in K$ について,

$$c_1(1+X)+c_2(X+X^3)+c_3(1+X^3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (c_1+c_3)+(c_1+c_2)X+(c_2+c_3)X^3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} c_1+c_3=0 \\ c_1+c_2=0 \\ c_2+c_3=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad c_1=c_2=c_3=0$$

だから, $1+X, X+X^3, 1+X^3$ は線形独立であり, 従って $\langle 1+X, X+X^3, 1+X^3\rangle$ の基底をなす. よって次元は 3.

演習 0.2 (1) $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の線形結合として書き表わしてみれば,

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, 求める変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$ の線形結合として書き表わしてみれば,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となるので, 求める変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である.

(3) これも定義からすぐに分かる:

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3))=(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから, 求める表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(4) $f(\boldsymbol{e}'_1), f(\boldsymbol{e}'_2), f(\boldsymbol{e}'_3)$ を $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2$ の線形結合として書き表わしてみれば,

$$(f(\boldsymbol{e}'_1), f(\boldsymbol{e}'_2), f(\boldsymbol{e}'_3)) = (f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから, 求める表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

演習 0.3 (1) $f(1), f(X), f(X^2)$ を $1, X, X^2, X^3$ の線形結合として書き表わしてみれば,

$$(f(1), f(X), f(X^2)) = (1, X, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので, 求める表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) $a + bX + cX^2 \in \operatorname{Ker} f$ となるための必要十分条件は,

$$f(a + bX + cX^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \\ 2a = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bX + cX^2 = b(X - X^2) \quad \Leftrightarrow \quad a + bX + cX^2 \in \langle X - X^2 \rangle.$$

従って, $\operatorname{Ker} f = \langle X - X^2 \rangle$ で, $\{X - X^2\}$ が $\operatorname{Ker} f$ の基底をなす.

(3) $f(a + bX + cX^2) = a(1 + X + 2X^2 + 3X^3) + b(1 - X + X^3) + c(1 - X + X^3)$ だから,

$$\operatorname{Im} f = \langle 1 + X + 2X^2 + 3X^3, 1 - X + X^3 \rangle.$$

$1+X+2X^2+3X^3, 1-X+X^3$ は線形独立なので, これが $\mathrm{Im}\, f$ の基底をなす.

(4) $\mathrm{rank}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, $\mathrm{null}\, f = \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$, $\dim K[X]_2 = 3$ だから, 確かに成立している.

演習 0.4 (1) ($\Rightarrow$) f が単射であったとする. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ であること[1]に注意すれば, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. よって, $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$.

($\Leftarrow$) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ であったとする. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U$ に対し, $f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}') \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$. よって f は単射. □

(2) 任意の $c_1, \ldots, c_m \in K$ について,

$$\begin{aligned} & c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m \in \mathrm{Ker}\, f \quad \Leftrightarrow \quad f(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & (f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_m)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, L_A. \end{aligned}$$

よって, 線形写像 $\varphi : \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, L_A$ を

$$\varphi(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

により定義することができる. この φ が同型写像であることは, ここまでの議論から明らか ($\mathrm{Ker}\, \varphi = \{\mathbf{0}\}$ がすぐに分かるので φ は単射. 全射性は先程の $\cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots$ を右から左にたどればわかる.) □

※これは 6.5 節で用いた同型写像

$$U \xrightarrow{\sim} K^m, \quad c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

を $\mathrm{Ker}\, f$ に制限したものですが, $\mathrm{Ker}\, f$ の元の行き先がちゃんと $\mathrm{Ker}\, L_A$ に入っていることを確かめることによって, その制限が $\mathrm{Ker}\, f$ から $\mathrm{Ker}\, L_A$ への線形写像になっていることがいえた, ということです.

[1] $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} - \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(3) 任意の $a_1, \dots, a_n \in K$ について,

$$
\begin{aligned}
& a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \in \operatorname{Im} f \\
\Leftrightarrow \quad & {}^{\exists}c_1, \dots, c_m \in K \ \text{ s.t. } \ f(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m) = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \\
\Leftrightarrow \quad & {}^{\exists}c_1, \dots, c_m \in K \ \text{ s.t. } \ (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & {}^{\exists}c_1, \dots, c_m \in K \ \text{ s.t. } \ A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L_A.
\end{aligned}
$$

よって, 線形写像 $\psi : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} L_A$ を

$$
\psi(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
$$

により定義することができる. この ψ が同型写像であることは, ここまでの議論から明らか. $\square$

演習 0.5 手順としては, 教科書の定理 7.6 の証明に沿って, 適当なユニタリ行列 P を具体的に求めればよい (証明は帰納法で行っていますが, 文中の $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ が最初からすべて固有ベクトルであれば, そこから Gram-Schmidt の直交化法を 1 回行うだけで十分です). 手順を解説するため (1) は詳細に記述し, (2)(3) は要点のみとする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. まず, A の固有多項式を計算すると,

$$
\Phi_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-3)^2.
$$

よって, A の固有値は 0 と 3 である.

0 に関する A の固有ベクトルを計算すると $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c : 定数, $c \neq 0$) という形な

ので, 固有空間 V_0 は

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. また, 3 に関する A の固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 : 定数, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$) という形なので, 固有空間 V_3 は

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. $K^3 = V_0 \oplus V_3$ だから, V_0 の基底と V_3 の基底をとって正則行列 P を作れば, それにより A が対角化できる (定理 7.3). ただし, その P がユニタリ行列 (直交行列) であるためには, 基底は正規直交基底になるようにとらなければならない (定理 7.5). そこで, 既に分かっている基底

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をもとに Gram-Schmidt の直交化法 (定理 6.22) を行ってそのような正規直交基底を求めていくことにしよう.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \underbrace{\frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)}{||\boldsymbol{e}_1||^2}}_{0} \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \underbrace{\frac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)}{||\boldsymbol{e}_1||^2}}_{0} \boldsymbol{e}_1 - \frac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)}{||\boldsymbol{e}_2||^2} \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

とし, 後は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の大きさを調節して単位ベクトルにすればよい:

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_1||} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_2||} \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_3||} \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

そこで,

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とすれば, P は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とすると, A の固有値は $2, 7, -3$ で, それぞれに関する固有空間は

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. この 3 つの空間は互いに直交しているので, あとはそれぞれから単位ベクトルをとれば求める正規直交基底が得られる:

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

そこで,

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/(5\sqrt{2}) & 3/(5\sqrt{2}) \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -3/5 & 4/(5\sqrt{2}) & 4/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

とすれば, P は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-1} & 1 \\ \sqrt{-1} & 2 & -\sqrt{-1} \\ 1 & \sqrt{-1} & 2 \end{pmatrix}$ とすると, A の固有値は $0, 3$ で, それぞれに関する固有空間は,

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる．これをもとに正規直交基底を作ると,

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ -2 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

を得る．そこで,

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{-1}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{-1}/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{-1}/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とすれば, P はユニタリ行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$