ジョルダン標準形の計算例

例題. 次の行列の各固有値に対する広義固有空間を求め, それを使ってジョルダン標準形を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[解答例] 与えられた行列を A とする. まず, 固有多項式を求めると,

$$\Phi_A(x) = |xE - A| = (x-1)^3(x-2).$$

よって, A の固有値は $1, 2$ であることが分かる. また, 教科書の定理 9.5 により, $\dim V_{(1)} = 3$, $\dim V_{(2)} = 1$. 一方, 固有空間 V_1, V_2 を計算してみると,

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. 先程求めた次元を考えれば, $V_{(1)} \neq V_1$, $V_{(2)} = V_2$ となる.

さて, 上記の結果と教科書の定理 9.17 とを合わせて考えれば, $V_{(1)}$ の基底として

$$\{(A-E)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1\} \cup \{\boldsymbol{x}_2\} \qquad ((A-E)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1)$$

という形のものがとれるはずである. そこで次に, $(A-E)\boldsymbol{x} \in V_1$ となる $\boldsymbol{x}$ を求めることにする. そのためにはまず, 連立 1 次方程式 $(A-E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための $\boldsymbol{b}$ の条件を調べる必要がある. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ とおいて, $(A - E \mid \boldsymbol{b})$ に行基本変形を何回かほどこすと,

$$(A - E \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & -2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & b_3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & b_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -b_1 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_4 \end{array}\right)$$

となるので, 連立 1 次方程式 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つための条件は,

$$b_1+b_3=0, \quad b_1+b_2+b_4=0.$$

V_1 の元でこの条件を満たすのは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍しかない. そこで $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおいて, $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の特殊解を求めると,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る (これに V_1 の元を足したものが $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一般解).

以上より,

$$V_{(1)}=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{(2)}=\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

. さらに, $V_{(1)}$ の基底と $V_{(2)}$ の基底を並べて, $\mathbb{C}^4$ の基底として

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとれば[1],

$$(A\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_2, A\boldsymbol{p}_3, A\boldsymbol{p}_4)=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, 2\boldsymbol{p}_4)=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

すなわち, A のジョルダン標準形とその変換行列が得られる:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] $V_{(1)}$ の基底は教科書の定理 9.20 の証明に準じて並べ替えている.