9 行列の対角化 (たぶん予習)

演習 9.1 n 次の正方行列 A に対して, ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は対角化可能であるという.

(1) もし A が正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化されるなら, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は A の固有値であり, P の各列は固有ベクトルであることを示せ. (ヒント: 両辺に左から P をかける.)

(2) 逆に, n 個の線形独立な A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が存在すれば, $P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ によって A は対角化可能であることを示せ.

演習 9.2 次の行列が対角化可能かどうかを調べて, もし可能ならば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 9.3 A を 2×2 の実対称行列とする (${}^tA = A$).

(1) A の固有値は必ず実数となることを示せ.

(2) A の固有方程式が重解をもつなら, A は対角行列であることを示せ.

(3) A が 2 つの異なる固有値 α, β をもつとき, それぞれに関する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とすると, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ. (ヒント: $\alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ を示せば $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ がいえる. 1×1 行列をスカラーと同一視すれば $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ と書けることに注意.)

(4) 正則行列 P が ${}^tP = P^{-1}$ を満たすとき直交行列という. A に対して, ある直交行列 P が存在して ${}^tPAP$ が対角行列になることを示せ.