

7 多項式と行列/固有多項式 の解答例

演習 7.1

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x-1 & 1 & x-1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{第 4 列に関して余因子展開}) \\
 & = x(x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = -x(x-1)^3.
 \end{aligned}$$

演習 7.2 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線形従属 $\Leftrightarrow \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-1 & 1 & 1 \\ x^2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3.$$

演習 7.3 (1) 固有多項式は $(x+1)(x-4)$, 固有値は $-1, 4$.

(2) 固有多項式は $x^2 + x - 1$, 固有値は $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(3) 固有多項式は $(x-1)(x-4)(x-6)$, 固有値は $1, 4, 6$.

(4) 固有多項式は $x(x-3)(x+1)$, 固有値は $0, 3, -1$.

(5) 固有多項式は $(x-3)(x+3)^2$, 固有値は $3, -3$.