5　行列式の性質 (その２) の解答例

演習 5.1 (1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2.$

(2) $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12.$

(3) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2.$ (第 1 列と第 3 列を入れ替え.)

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-2a_{21} & a_{32}-2a_{22} & a_{33}-2a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2.$

演習 5.2 (第 3 列)+(第 1 列) および (第 4 列)+(第 2 列) により,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} & -\sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & -\sqrt{2} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{7} & -\sqrt{3} & \sqrt{7} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{3} & \sqrt{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & -\sqrt{3} & 2\sqrt{7} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{7} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2\sqrt{7} & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{7} \end{vmatrix} = 7 \cdot 40 = 280.$$

演習 5.3

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & (B+A)-(A+B) \\ B & A-B \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|.$$

演習 5.4 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とする.

(必要性) 3 つの平面が 1 本の直線を共有するならば, 少なくとも原点でないある 1 点 (x_0, y_0, z_0) $(\neq (0,0,0))$ を共有するはずである. このとき,

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, もし $|A| \neq 0$ であったとすると, A は正則だから逆行列 A^{-1} が存在することになるが, 上の式の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となってしまい, (x_0, y_0, z_0) が原点でないことに反する. 従って $|A| = 0$ でなければならない.

(十分性) $|A| = 0$ とすると, $|{}^tA| = 0$ だから, (教科書の定理 3.17 より) $\boldsymbol{v}({}^tA) = (0,0,0)$ となるようなゼロでないベクトル $\boldsymbol{v} = (x_0, y_0, z_0)$ が存在する. $\boldsymbol{v}({}^tA) = (0,0,0)$ を転置して書き直せば,

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, 問題の 3 平面が原点でない 1 点 (x_0, y_0, z_0) を共有することがわかる. 一方, 3 平面は明らかに原点も共有するので, 原点と (x_0, y_0, z_0) を結ぶ直線も共有する.

$\square$

[別証明] $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とする. 最初の式が 3 つの平面を表すということから, A は零行列ではありえない. よって $\operatorname{rank} A \neq 0$. さらに, 3 つの平面の共通部分は線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体と一致することに注意すれば,

(i) $\operatorname{rank} A = 1 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が $2 \Leftrightarrow 3$ 平面の共通部分は平面をなす,

(ii) $\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が $1 \Leftrightarrow 3$ 平面の共通部分は直線をなす,

(iii) $\operatorname{rank} A = 3 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が $0 \Leftrightarrow 3$ 平面の共通部分は 1 点をなす,

となる. しかし (i) は, どの 2 つの平面も互いに異なるという仮定に反するので, ありえない. 従って, 問題の条件は (ii) と同値になる. 一方, (iii) $\Leftrightarrow$ A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ だから, 与えられた仮定のもと, (ii) が成立するための必要十分条件は $|A| = 0$ となる.

$\square$