4　行列式の性質 (その１) の解答例

演習 4.1 (1) $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 27 \\ 5 & 5 & 15 \\ 23 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 15 \\ 23 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 23 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 0.$

(2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1+\sqrt{7} \\ 2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{5} & 2+\sqrt{7} \\ 3+\sqrt{2} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{5} & 3+\sqrt{7} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{5} & 2+\sqrt{7} \\ 3+\sqrt{2} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{5} & 3+\sqrt{7} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{5} & 2+\sqrt{7} \\ 3+\sqrt{2} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{5} & 3+\sqrt{7} \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

演習 4.2 左辺は $x^3 +$ (低次の項) となるので, 恒等的に 0 でない x の 3 次式になる. 従って, 方程式の解は高々 3 個である. 一方, 左辺の x に $1, 2, 3$ を代入すると, それぞれ重複する行があるため 0 となるので, 因数定理により $x = 1, 2, 3$ は方程式の解となる.

演習 4.3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_5\mathrm{C}_2 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_3 & {}_6\mathrm{C}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_0 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 & 1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3 & {}_5\mathrm{C}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_0 & 1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_3 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_5\mathrm{C}_2 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}_1\mathrm{C}_1 & 1 & 1 & 1 \\ {}_2\mathrm{C}_2 & {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_3\mathrm{C}_3 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_5\mathrm{C}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}_2\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \\ {}_3\mathrm{C}_2 & {}_4\mathrm{C}_2 & {}_5\mathrm{C}_2 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}_2\mathrm{C}_1 & 1 & 1 \\ {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ {}_3\mathrm{C}_1 & {}_4\mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = 1.$$