

1 写像について (全射・単射)

置換の話の前段階として, 今日には写像の概念について (特に全射・単射について) 少し演習して慣れておきましょう.

演習 1.1 \mathbb{R} を実数とする. 次で与えられる写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ がそれぞれ全射であるかどうか, また単射であるかどうかを答えよ.

(1) $f(x) = 2x - 1$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^3$

(4) $f(x) = x^3 - 3x$

(5) $f(x) = e^x$

演習 1.2 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ を写像とする.

(1) f, g が共に全射ならば, 合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ も全射であることを示せ.

(2) f, g が共に単射ならば, 合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ も単射であることを示せ.

(3) f, g が共に全単射ならば (1), (2) により $g \circ f$ も全単射になる. このとき $g \circ f$ の逆写像は $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることを示せ.

集合 S に対して, S から S への恒等写像を $\text{id}_S: S \rightarrow S$ と書くことにする.

演習 1.3 写像 $f: A \rightarrow B$ に対し, ある写像 $g: B \rightarrow A$ が存在して $g \circ f = \text{id}_A$, $f \circ g = \text{id}_B$ となるならば f は全単射であり, $g = f^{-1}$ となることを示せ.