

## 7 固有値・固有ベクトル (再び)

演習 7.1 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ (複素数の範囲で).

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

演習 7.2 (行列の対角化)  $A$  を  $n$  次の正方行列とする. もし, ある正則行列  $P$  が存在して  $P^{-1}AP$  が対角行列になるなら,  $A$  は対角化可能であるという.

(1) もし  $A$  が対角化可能ならば,  $A$  は  $n$  個の線形独立な固有ベクトルをもつことを示せ.

(2) 逆に, もし  $n$  個の線形独立な  $A$  の固有ベクトルが存在するなら,  $A$  は対角化可能であることを示せ.

演習 7.3 先程の演習 7.1 の行列を, 対角化可能なものとそうでないものに分類せよ.