6 行列式の計算・余因子展開・余因子行列 の解答例

演習 6.1 (1) 上三角行列なので対角成分をかけ合わせれば良い (教科書の補題 3.6).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

(2) 第 1 列に関して余因子展開すれば,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \times (-12) = 24.$$

(3) 行基本変形で第 1 列を整理してから余因子展開すれば,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

演習 6.2

(1) $|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -14, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$

第 2 列に関する余因子展開で $|A|$ を計算すると,

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + (-1)^{2+2} a_{22}|A_{22}| + (-1)^{3+2} a_{32}|A_{32}| \\ &= -2 \times (-14) + 2 \times (-1) - 4 \times 6 = 2. \end{aligned}$$

(2) $|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad |A_{32}| = 6, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2.$

第 3 行に関する余因子展開で $|A|$ を計算すると,

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{3+1} a_{31}|A_{31}| + (-1)^{3+2} a_{32}|A_{32}| + (-1)^{3+3} a_{33}|A_{33}| \\ &= 2 \times 10 - 4 \times 6 + (-3) \times (-2) = 2. \end{aligned}$$

(3) $\tilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} -22 & -(-14) & 4 \\ -(-2) & -1 & 0 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 2 & 10 \\ 14 & -1 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (確認は略.)