3 固有値・固有ベクトルの微分方程式への応用について

変数 t の関数 $y_1(t), y_2(t)$ に関する定数係数の (斉次) 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

を考える.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおき, 上記の微分方程式を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ と書く.

このとき, λ が A の固有値で $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が λ に対する A の固有ベクトルであることと, 微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (\lambda, x_1, x_2 \text{ は定数}, (x_1, x_2) \neq (0, 0))$$

という形の解を持つことが同値になる.

従って, A の固有値を λ_1, λ_2 として, それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が得られたとき, もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が線形独立 (つまり A が対角化可能) なら, 上記の微分方程式の一般解として

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の定数})$$

が得られることになる.

演習 3.1 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 6y_2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 3y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \end{cases}$

次に, 定数項を加えて,

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + g_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + g_2 \end{cases} \quad (a, b, c, d, g_1, g_2 \text{ は定数})$$

という形の (非斉次) 連立微分方程式を考えてみよう.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

とおき, 上記の微分方程式を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}$ と書く.

ここで, $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$ を斉次連立微分方程式 $\boldsymbol{h}' = A\boldsymbol{h}$ の解とする. もし, 連立方程式 $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ の解となる定数成分の縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するならば, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ より,

$$(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x})' = A\boldsymbol{h} = A\boldsymbol{h} + A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} = A(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}.$$

よってこのとき, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}$ はもとの方程式の解になる.

演習 3.2 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 + 7 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 - 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 3y_2 - 12 \\ y_2' = 2y_1 + 6y_2 + 9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 3y_2 - 12 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 + 9 \end{cases}$

今度は, 変数 t の関数 $y(t)$ に関する 2 階の定数係数線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = c \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

を考えてみる. $y_1 = y$, $y_2 = y'$ とおくと, 上記の方程式は

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -by_1 - ay_2 + c \end{cases}$$

と書きなおすことができるので, もし対応する行列が対角化可能なら, 先程の解法が使える.

演習 3.3 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - y = 0$
(2) $y'' + 3y' + 2y = 0$
(3) $4y'' - 15y' - 4y = 0$
(4) $y'' - y = 2$
(5) $y'' + 3y' + 2y = 6$
(6) $4y'' - 15y' - 4y = 4$