2　２次の正方行列の固有値・固有ベクトル の解答例

演習 2.1 固有値とそれに関する固有ベクトルを列挙する (c は 0 でない任意定数).

(1) $-3,\ c\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\quad -4,\ c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$　(2) $2,\ c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\quad 4,\ c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(3) $-1,\ c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\quad -2,\ c\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$　(4) $1,\ c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\quad -3,\ c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

(5) $2,\ c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\quad -3,\ c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

演習 2.2 (1) P の列ベクトルを $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ とする (すなわち $P=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$). P は正則だから $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ は線形独立である. 仮定より, ある定数 α,β が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

となる. この両辺に左から P をかければ,

$$AP=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=(\alpha\boldsymbol{u},\beta\boldsymbol{v})$$

を得る. すると, $AP=(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$ であるから, $A\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{v}$ であることが分かる. 従って, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ はそれぞれ固有値 α,β に関する線形独立な A の 2 つの固有ベクトルである. □

(2) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ をそれぞれ固有値 α,β に関する線形独立な A の 2 つの固有ベクトルとする. これらを並べて作った行列を $P=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ とすると, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が線形独立なので P は正則行列となる. また, $A\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{v}$ より,

$$AP=(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})=(\alpha\boldsymbol{u},\beta\boldsymbol{v})=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

この両辺に左から P^{-1} をかければ $P^{-1}AP$ が対角行列になることが分かる. □

ある正則行列 P があって $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, A は**対角化可能**であるという. 例えば, 演習 2.1 の行列はすべて対角化可能である. (1) ならば $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とすれば,

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}.$$