

平面ベクトル

これは以前に工学の学生向けに書いたプリントを少し手直したものです。前回の授業で話し足りなかったこと(特に内積について)がいくつかあるので、このプリントで補っていただけると嬉しいです。ただ、もともとは何も知らない人を想定して書いたものなので、記述がかなり冗長です。くだいと思った部分は適当に読み飛ばしてください。(内積については p. 13 からです。)

1 ベクトルとは何か?

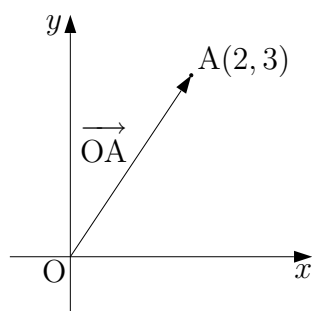
力学で登場する物理量には、質量、(位置の)変位、距離、時間、速度、運動量、加速度、力、等々がありますが、そのような量のうち、大きさだけをもつものはスカラー、大きさと向きをもつものはベクトルと呼ばれます。今挙げた物理量の例をスカラーとベクトルに分類しますと、

スカラー: 距離, 時間, 質量;

ベクトル: (位置の)変位, 速度, 運動量, 加速度, 力;

となります。ここでは変位を例にとってベクトルとはどのようなものか説明したいと思います¹。

平面座標系で、ある質点が点 $O(0, 0)$ から点 $A(2, 3)$ まで移動したとします。



このときの質点の位置の変化(経路は問わない)を表す量を「(位置の)変位」といいます。まず、位置の変化を表すには二点 O, A 間の距離の情報が必要ですから、変位は大きさをもちます。しかし、距離だけではどう変化したのかは完全にはわかりません。 O から A へ向かう「向き」の情報を加味することではじめて変位を表すことができます。そこで、変位はベクトルとして表します。このベクトルを、点 O から点 A まで移動したときの変位、という意味で \vec{OA} と書くことにしましょう。点 O をベクトル \vec{OA}

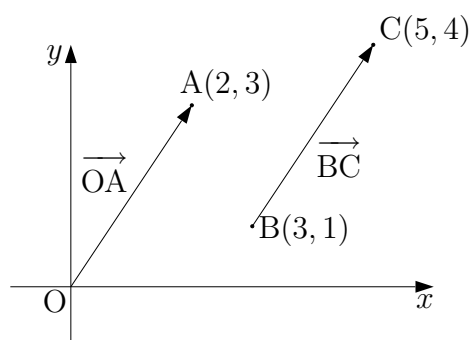
¹ベクトルで表される物理量にはいろいろあるのに、なぜ変位を例にとるのかというと、ベクトルの数学的な扱いや図形的なイメージは、位置の変位を表すベクトルを基本とするとわかりやすいからです。

の始点, 点 A をベクトル \vec{OA} の終点といい, \vec{OA} を座標系に描くときは始点から終点に向けての矢印 (有向線分) として描きます. また, このベクトル \vec{OA} の大きさは O, A 間の距離, 言いかえると線分 OA の長さであり, この値を $\|\vec{OA}\|$ と書きます (これは $|\vec{OA}|$ と書くこともあります). この場合, 三平方の定理により,

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

となります. 同様に, ベクトルを座標系に描くときには (変位を表すベクトルでなくても), 常に長さが大きさに対応するように描きます.

ここでもう一つ, 点 B(3, 1) から点 C(5, 4) まで移動したときの変位 (ベクトル \vec{BC}) を考えてみましょう.



このとき, 移動している場所は異なりますが, “位置の変化のしかた”という視点で見るとどうでしょうか? この場合, 「 x 軸方向には 2 だけ, y 軸方向には 3 だけ移動した」という意味では変位は等しいと考えます. ベクトルとして \vec{OA} と \vec{BC} は等しいわけです:

$$\vec{OA} = \vec{BC}.$$

これは例えば, 「自動車 X と自動車 Y が同じ速度で走っている」というときに, 「X が走っている」という現象と「Y が走っている」という現象は違っても, それぞれの現象に関する「速度」という量は同じ, というのと似たような感覚です. つまり, 「O から A へ移動した」という現象と, 「B から C へ移動した」という現象は違っても, それぞれの現象に関する「変位」という量は同じ, というわけです.

これでだいたいベクトルとはどのようなものか, 分かったでしょうか? 次に, 「ベクトルをどうやって数学的に表すか」という問題を考えてみたいと思います.

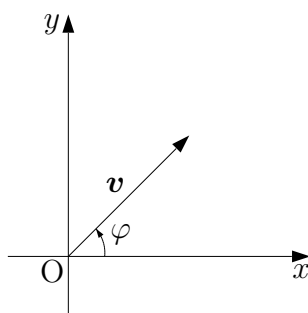
2 ベクトルの表し方

ベクトルを表す記号としては (スカラーと区別するために) v, w のように太文字を用いたり, \vec{v}, \vec{w} のように上に矢印をつけたものを用いることが多いです. ただ, これか

からお話したいのは、このような記号の問題ではなくて、ベクトルの大きさと向きをどう
いう数値でどのように数学的に表せば良いか? という問題です.

2.1 大きさと角度で表す

ベクトルは大きさと向きをもつ量ということですから、とりあえず素朴に思いつく
方法としては、「向き」を角度で表して、「大きさ」と「角度」を使って表現する方法
があります. 角度としては、 x 軸から左回りに計った角度を使います.

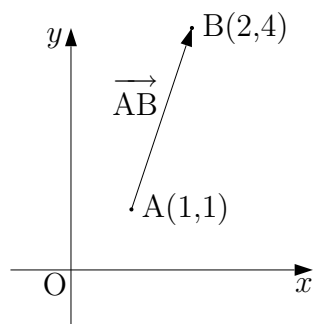


そうすると、大きさ $\|v\|$ と角度 φ を指定してやればベクトル v を定めることができ
ます (ただし、これは $\|v\| \neq 0$ の場合のこと. $\|v\| = 0$ の場合はゼロベクトル (後述)
といって、角度に意味はなくなります). なお、これは平面ベクトルなので角度の情報
は一つで済みましたが、空間ベクトルの場合は角度の情報は二つ必要になります.

しかし、この方法には下の例以外では特に決まった書き方というものはなく、「ベク
トルを表す方法」としてはほとんど用いられません (次の節で説明する成分表示に比
べると使いにくいので). ただ、こういう視点でベクトルをとらえることはそれなりに
重要なので、頭に入れておいてください. とくにこの考えが重要になるのは、電気回路
で正弦波交流電流や正弦波交流電圧に対応するベクトルを表す場合です. 例えば、最
大値が E で初位相が φ の正弦波交流電圧 ($v(t) = E \sin(\omega t + \varphi)$) に対応するベクトル
(フェーザ) を、 $E \angle \varphi$ と書いて、大きさが E で、 x 軸からの角が φ となるベクトル
として表すことがあります. (といっても、これに対応する複素数で表示することの方
がもっと多いのですが.)

2.2 成分表示

もう一つの方法は成分表示です. ほとんどの場合、ベクトルを表すにはこちらがよく
用いられます.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

点 A(1,1) から点 B(2,4) に移動したときの変位ベクトル \vec{AB} を考えてみます。このとき、変位を x 軸方向のもの (x 成分) と y 軸方向のもの (y 成分) に分解して、「 x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 進んだときの変位」と思い、

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書きます (横ベクトルで表して $\vec{AB} = (1, 3)$ と書くこともあります)。これが成分表示です。もう一つ例を出しますと、点 O(0,0) から点 C(3,2) に移動したときの変位 \vec{OC} を考えれば、 x 成分は 3, y 成分は 2 となり、成分表示は $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるわけです。変位以外の量を表すベクトルについても、同様に成分表示が用いられます。

成分表示は扱いやすく、一般化しやすいのでよく用いられるわけですが、あえて難を言うとするれば、ベクトルの大きさや向きが表面に出てこない、というのが玉に瑕でしょうか。とはいえ、それらの情報は成分表示から読み取ることができます。例えば、 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と成分表示されたベクトルを考えると、その大きさは、ピタゴラスの定理より、

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と計算できます。 x 軸からの角度 φ は、(図で表すなら簡単ですが) 厳密に書こうとするとちょっとややこしくて、 $a \neq 0$ ならば

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a}, \quad a > 0 \text{ のとき } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad a < 0 \text{ のとき } \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

となり、 $a = 0, b > 0$ ならば $\varphi = \pi/2$ で、 $a = 0, b < 0$ ならば $\varphi = -\pi/2$ とすればよく、 $a = 0, b = 0$ ならばゼロベクトル、ということになります。

逆に、大きさが E , x 軸からの角度が φ のベクトルの成分表示は、三角比を使って、

$$E \angle \varphi \xrightarrow{\text{成分表示}} (E \cos \varphi, E \sin \varphi)$$

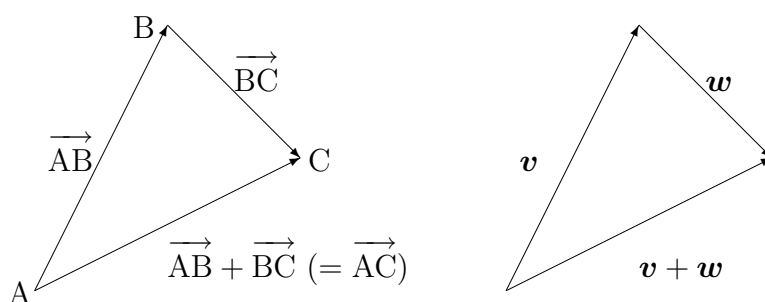
と表されます。大きさと角度で表す方法と成分表示とは同等の情報を与えるものであって、従って、このように相互に変換できるわけです。

さて、ここまで「ベクトルの表し方」を説明してきましたが、ベクトルを実際に応用するにはもちろんそれだけでは不十分です。例えば力学の理論展開（幾つかの物理量の中に成立する法則を述べたり、ある現象に付随する物理量たちの相互の関係を調べたり）のためには、幾つかのベクトルを組み合わせたり、スカラーとベクトルを組み合わせたり、といった操作が必要になります。具体的には、次節から解説するベクトルの加法やスカラー倍、また今度お話しする予定の内積や外積、それからこの講義では扱いませんがベクトルの微分や積分（「ベクトル解析」の範疇）が重要です。こういった操作がとてもうまく機能して（微分がベクトルの加法やスカラー倍を保存する、つまり線形作用である、等々）、力学の理論をより簡明に記述するのに成功したため、今ではベクトルは欠かせない概念となっているわけです。

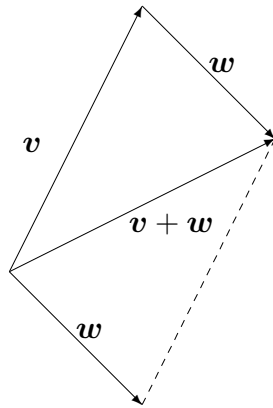
3 ベクトルの加法

3.1 ベクトルの和

まず、変位ベクトルの和について考えてみましょう。例えば、ある人が東に 3 km 歩いた後、さらに東に 5 km 歩いたら、結局その人は東に $3 + 5$ km 歩いたこととなりますが、そういうことの一般化として定義します。質点が点 A から点 B に移動した後で、さらに点 B から点 C に移動したときの位置の変位を、それぞれの段階ごとの変位ベクトル \vec{AB} と \vec{BC} の和 $\vec{AB} + \vec{BC}$ とする。（この場合、これは「点 A から点 C に移動したときの変位」なので、実は \vec{AC} に他ならない。）



これと同様に、一般のベクトルの和も次のように定義します：ベクトル v, w について、 v の終点と w の始点をそろえて描いたときに、 v の始点から w の終点へ行くベクトルを $v + w$ とする。また、 v の始点と w の始点をそろえて描いてみれば、 $v + w$ は v と w を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の対角線に沿ったベクトルであることが分かります。



では、これを成分表示で書いてみるとどうなるでしょうか？ つまり、 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,
 $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ と成分表示されているとすると、 $v + w$ はどのような成分表示をもつベクトルでしょうか？ 成分表示とは、そのベクトルを（変位ベクトルと考えたときに）「 x 軸方向の変位」と「 y 軸方向の変位」に分解して表示しているものであることを思い出しましょう。ベクトルの和をとる操作を、 x 軸方向と y 軸方向に分解すると、 x 軸方向には「 a 進んだ後、 c 進む」=「 $a+c$ 進む」となり、 y 軸方向には「 b 進んだ後、 d 進む」=「 $b+d$ 進む」となるので、結局、

$$v + w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

という結論になります（代数的には、これがベクトルの和の定義です）。つまり、単に成分ごとに足し算をすれば良いわけです。

ここで、すぐに分かることとして、ベクトルを足す順番を変えても、和は同じベクトルになる、ということがあります：

$$v + w = w + v.$$

これは可換法則と呼ばれます。他に、これも少し考えてみると分かるのではないかと思います。

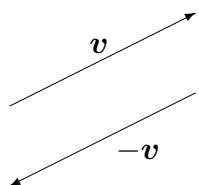
$$(u + v) + w = u + (v + w) (= u + v + w \text{ と書く})$$

が成り立ちます。つまり、 u と v との和をとってその結果と w との和をとってできるベクトルと、 v と w の和をとってその結果と u との和をとってできるベクトルとは等しい、というわけです。両者が等しいのでカッコをとって $u + v + w$ と書いてしまうこともあります。これは結合法則と呼ばれています。

結合法則と可換法則を満たす演算のことを一般に「加法」と呼びます。だからこの節のタイトルも「ベクトルの加法」としているわけです。

3.2 逆ベクトル, ゼロベクトル

数の足し算引き算が自由にできるようになるには, 負の数や 0 の概念が必要となりますが, ベクトルにおいてこれに該当するのが逆ベクトルとゼロベクトルです. ベクトル v に対して, v と大きさが等しく向きが反対のベクトルを $-v$ と書いて, v の逆ベクトルと呼びます.



$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$
$$-v = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

成分表示で書くならば, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ のとき, $-v = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ となります. 「 x 軸方向に $-a$ 進み, y 軸方向に $-b$ 進む」あるいは「 x 軸方向に a 戻り, y 軸方向に b 戻る」ベクトルというわけです.

さて, v と $-v$ との和をとると, $v + (-v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という, 大きさがゼロの, いわば「動かない」ベクトルがでてきます. 大きさがゼロのベクトルをゼロベクトルといい, (スカラーの 0 と区別するために) 太文字で $\mathbf{0}$ とか上に矢印をつけて $\vec{0}$ などと書きます. (しかし面倒臭いときはゼロベクトルを 0 と書いても大抵は通じるので, 誤解の恐れがなければそれでも良いです.)

変位ベクトルで言うと, \vec{AB} の逆ベクトルというのは「点 B から点 A まで移動したときの位置の変位」すなわち $-\vec{AB} = \vec{BA}$ となります. 二つの和をとると, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ で, この \vec{AA} がゼロベクトルとなるわけです. (この場合は「動かない」というよりは, 「点 A から点 B に移動した後, 点 B から点 A へ移動したので, 位置の変位という観点では, 結局点 A から動かなかったことと同じだね」という感じ.)

あるベクトル v とゼロベクトルとの和は, 和の定義を考えれば当然ですが, もとのベクトル v と同じものになります:

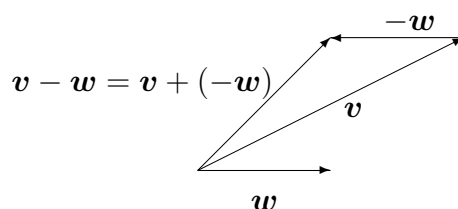
$$v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

成分表示も $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ですから, 各成分ごとに 0 を足す, ということでまったく変わらないわけです.

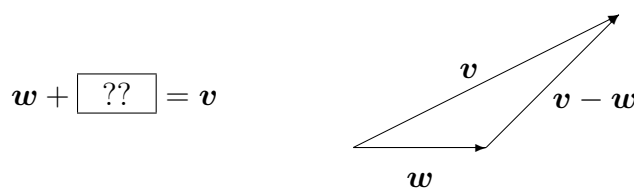
3.3 ベクトルの差

ベクトル v と w が与えられたときに、ベクトルの差 $v - w$ というのはどういう意味を持つベクトルとして定義すべきでしょうか？ これには二通りの考え方があって、どちらの考え方で定義しても結論は同じものになります。

第一の考え方は単純に、 v と、 w の逆ベクトル $-w$ との和と考えるものです。つまり、 $v - w = v + (-w)$ とする。



第二の考え方は、 $v - w$ を「 w を足すと v になるベクトル」とするものです。つまり、下の四角のところに入るベクトルです。



で、それは何か？ ということを考えてみると、 w の終点から v の始点に向かうベクトルがそれだということがわかります。この考え方は、後で位置ベクトルと変位ベクトルの関係 ($\Delta r = r_2 - r_1$) について考えるときに役に立つと思います。さっきの図と比べてみると、 $v + (-w)$ を平行移動したのにも見えますが.....実際同じベクトルであることを代数的に確かめてみることにします。そこで、

$$w + x = v$$

を満たすベクトル x を代数的に求めてみましょう。これは、一次方程式を解くのと似たような方法で求めることができます。つまり、左辺の w を右辺に「移項」します。両辺に $-w$ を足すと、左辺は (分配法則と交換法則を思い出して) $w + x + (-w) = w + (-w) + x = 0 + x = x$ となるので、

$$x = v + (-w)$$

を得る。よって、さっきの定義と同じものだということが確認できます。

ところで、ベクトルの差を成分表示で表すとどうなるかという、 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $w = (c, d)$ とすると、 $-w = \begin{pmatrix} -c \\ -d \end{pmatrix}$ でしたから、

$$v - w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$$

となります。つまり代数的には、単に各成分について引き算したものになるわけです。

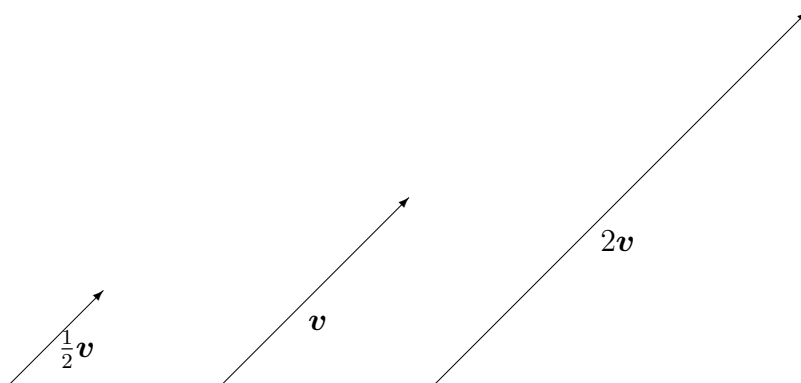
4 ベクトルのスカラー倍

力学で用いる物理量に運動量というものがありますが、それは次のように定義されます：

$$(\text{運動量}) = (\text{質量}) \cdot (\text{速度}).$$

ここで、質量はスカラー、速度はベクトルです。これはベクトルのスカラー倍というものであって、運動量はベクトルになります。

ベクトルのスカラー倍はどうやって定義するのかという、まず k を正の数 (スカラー)、 v をベクトルとするとき、向きが v と等しく大きさが $k\|v\|$ (v の大きさの k 倍) のベクトルを kv と書き、 v の k 倍とします。



成分表示で書くと、 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ のとき、 $kv = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ となります。成分ごとに k をかけるわけです。また、 $k = 0$ のときの kv は、大きさが 0 倍のベクトルということで、ゼロベクトルとします。それから、 k を正の数とするとき、 $(-k)v$ は kv の逆ベクトルとして定義します。つまり、 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき、 $(-k)v = -kv = \begin{pmatrix} -ka \\ -kb \end{pmatrix}$ です。だから

ら、一般に、 k が正の数でも負の数でも 0 であっても、スカラー倍は $k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ となります (代数的にはこれが定義です)。

5 成分表示によるまとめ

今までの話を成分表示についてまとめてみると、

$$\text{ベクトルの和: } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad (\text{成分ごとの足し算})$$

$$\text{ベクトルの差: } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \quad (\text{成分ごとの引き算})$$

$$\text{スカラー倍: } k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} \quad (\text{成分ごとにスカラーをかける})$$

となります。これまで幾何的な意味から説明してきたので少々長くなりましたが、代数的な計算としては非常に簡単であって、これだけです。

6 可換法則、結合法則、分配法則など

以上述べてきたベクトルの加法とスカラー倍について、次のことが成り立ちます。 k, l をスカラー、 u, v, w をベクトルとするとき、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad u + v &= v + u, & \text{(ii)} \quad (u + v) + w &= u + (v + w), \\ \text{(iii)} \quad k(u + v) &= ku + kv, & \text{(iv)} \quad (k + l)v &= kv + lv, \\ \text{(v)} \quad (kl)v &= k(lv). \end{aligned}$$

(i) は既に述べた可換法則 (または交換法則)、(ii) は結合法則です。また、(v) のようなものも結合法則と言います。(iii)、(iv) のようなものは分配法則と呼ばれます。各々の式の両辺はそれぞれ幾何的には別々のニュアンスをもつベクトルであるわけですが、成分表示して両方を表示してみると同じベクトルであることがわかります (各自、確かめてみてください)。

で、ここで何が言いたいのかといえますと、ベクトルの代数的な計算の際には「分配法則を使って展開」とか「同類項をまとめる」とか、先程もやったように「移項」をするとかいったことが自由にできるということです。そういうことは今まで慣れ親しんできた数の計算と同様にやってよい、ということのをこれらの法則が保証しているわけです。ただ、スカラーとベクトルの区別はきちんと意識しておく必要があります。例えば、「ベクトルの割り算」は行うことができません。演習の授業などで、行列 A, B

とベクトル $v (\neq 0)$ について, $Av = Bv$ が成り立つときに, 「両辺を v で割って」
 $A = B$ である, というような議論をする人がたまにいるのですが, 次の例を見ればそ
 ういう議論はおかしいことが分かります:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7 単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルといいます. 例えば,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

などは単位ベクトルです. 一般に, あるベクトル $v (\neq 0)$ が与えられたとき, v と同じ
 向きの単位ベクトルを作るには, スカラー倍して,

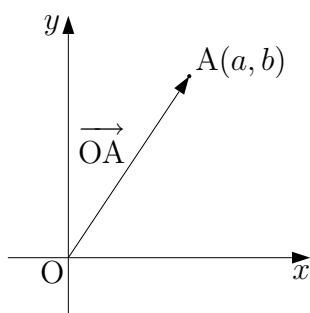
$$\frac{1}{\|v\|}v \quad (= \frac{v}{\|v\|} \quad \dots \text{のようにも書く})$$

とします. スカラー倍の定義により, これは「向きが v と同じで, 大きさは $1/\|v\|$ 倍
 のベクトル」ですから, 大きさは丁度 1 になるわけです.

単位ベクトルという名称には「その向きの単位となるベクトル」というような意味
 がこめられています. 例えば, e_1 は x 軸方向の単位となるベクトル, e_2 は y 軸方向の
 単位となるベクトル, というような役割をもちます. 後でお話する内積には「方向成
 分をとりだす」という機能があるのですが, そのときに単位ベクトルが用いられます.

8 位置ベクトル

位置ベクトルの定義. 座標系に点 A があったときに, A の位置ベクトルを, 座標系の
 原点を O とするときの \vec{OA} として定義します.



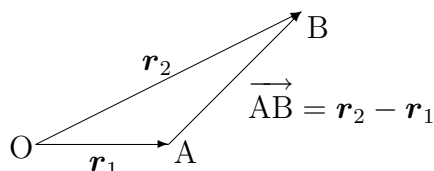
点 A の座標を (a, b) とすると、これがそのまま A の位置ベクトルの成分表示となります:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

位置ベクトルというのは位置の情報をベクトルで表すためのもので、始点は常に座標系の原点にとります。

位置ベクトルと変位ベクトル. 位置の情報をベクトルで表す利点は、他の意味を持つベクトルと位置の情報とを関連づけて論じることができる、ということにあります。例えば、一般の変位ベクトルを、位置ベクトルを使って表すことができます。

座標平面の点 A, B について、A の位置ベクトルを $r_1 = \vec{OA}$, B の位置ベクトルを $r_2 = \vec{OB}$ とするとき、この二つのベクトルと \vec{AB} とを描いてみましょう:



ここで、「ベクトルの差」のところでお話したことを思い出して欲しいのですが、 \vec{AB} は、実は $r_2 - r_1$ と一致しています。つまり、変位ベクトルは、終点の位置ベクトルから始点の位置ベクトルを引いたものになっているわけです。だから、A の座標が (a, b) , B の座標が (c, d) だったとすると、 \vec{AB} の成分表示は

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - a \\ d - b \end{pmatrix}$$

となるわけです。

ここで、ある質点が A から B へ移動したときのことを考えてみます。質点が A を出発したときの時刻を t_1 , B に着いたときの時刻を t_2 とすると、移動には $\Delta t = t_2 - t_1$ の時間がかかったこととなります。このときの位置の変位を $\Delta r = r_1 - r_2$ と書くとき、これを $1/\Delta t$ 倍したベクトル

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

は、いわば「平均速度」と呼ぶべきものになります。もし質点の運動が等速直線運動であったなら、これは速度そのものです。

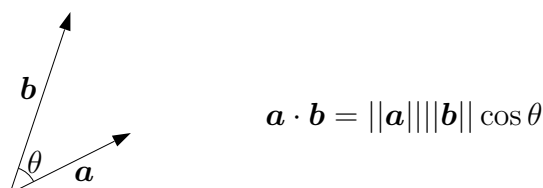
ただし一般には、速度というのは刻々と変化するものです（自動車のスピードメーターを見ていればわかると思いますが）。そういう場合の速度をとらえるには、変化する位置ベクトルを微分するという操作が必要になるわけですが、それは「ベクトル解析」の範疇になるでしょう。

9 内積

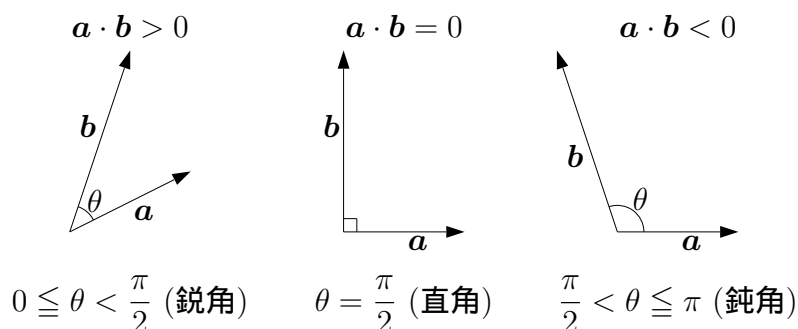
この講義全体の計画では、どちらかというと行列と連立方程式の話が中心なので、ベクトルの内積については最初の授業でちょっと触れる程度にならざるを得ないのですが、力学への応用などを考えるともう少し詳しくお伝えしたいこともあるので、そういう部分はプリントで補足したいと思います。

9.1 内積の定義

ベクトル a, b があって、始点を合わせて描いたときに、 a と b のなす角が θ であったとします (角 θ は小さい方、つまり $0 \leq \theta \leq \pi$ となる方をとることにする)。



このとき、 a と b の内積 $a \cdot b$ を、 $a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$ (ただし、 $a = 0$ または $b = 0$ のときは θ に意味はなく、単に $a \cdot b = 0$ とする) により定義します²。 θ の値によって $a \cdot b$ の正負が異なることに注意しましょう:



特に、内積が 0 のとき二つのベクトルは直交している、また逆に直交する二つのベクトルの内積は 0 になる、ということは重要なので、覚えておいてください:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \text{ と } b \text{ は直交.}$$

実は、 θ が分からなくても a と b の成分表示が分かっているならば内積が計算できるので (後述)、二つのベクトルが直交しているかどうかを成分表示だけから調べたいときに、よくこのことが用いられます。

²教科書では内積を表すのに (a, b) という記号を使っていますが、物理学ではたぶん $a \cdot b$ という記号を使う方が多いと思います。

また, $a = b$ のとき, $\theta = 0$ なので $\cos \theta = 1$ となり,

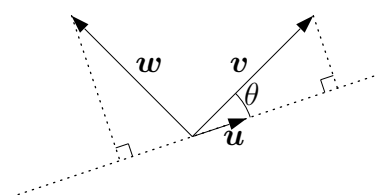
$$a \cdot a = \|a\|^2$$

が成立します. これはベクトルの大きさ (の 2 乗) を内積で表したいときによく用いられます. 大きさ (の 2 乗) を内積で表しておく, 内積の線形性 (後述) などが応用できて便利なおことがあるためです.

9.2 内積の機能—方向成分をとりだす (射影)

内積には「方向成分をとりだす」(つまり射影) という機能があり, それが内積の応用を考えるとときに重要となります. 例えば, 力学では, 物を動かすのに力がどのくらい寄与したかを表す「仕事」という物理量を考えることがあります. 仕事というのは, いくつかの力がかかって物体が動いたときに, ある一つの力に注目して, 物体が実際動いた方向の力の成分をとりだして, それに位置の変位の大きさ (動いた距離) をかけたものなのですが, それを数学的に定義するには内積が用いられます.

方向成分とは何かということの説明するため, まず, 内積の片方のベクトルが単位ベクトルのときを考えてみます. v をベクトル, u を単位ベクトルとして, v と u のなす角を θ とすると, $\|u\| = 1$ なので, $u \cdot v = \|v\| \cos \theta$ となります. これを「 v の u 方向の成分」ということができます.



$$u \cdot v = \|v\| \cos \theta = (v \text{ の } u \text{ 方向の成分})$$

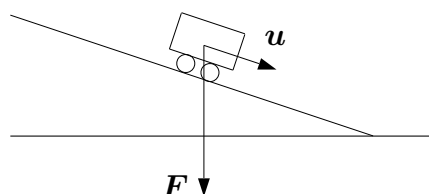
上の図でいうと, u を含む直線に v の終点から垂線をおろしたとき, v の始点からその垂線の足までの長さが丁度 $u \cdot v = \|v\| \cos \theta$ になっています. v というベクトルは, u 方向には $u \cdot v$ だけ進むベクトルであるというわけです. また, 上の図の w のようなベクトルがあったとすると, w と u のなす角は鈍角になるので $u \cdot w$ は負の値になりますが, それは, u 方向の成分でみたときに w は u とは逆向きに進むベクトルであることを意味します.

例えば, e_1 は x 軸方向の単位ベクトルなので, ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ との内積をとると x 成分がでてきて, $e_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a$ となります. 同様に, e_2 は y 軸方向の単位ベクトルなので, $e_2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b$ と, y 成分がでてくるわけです.

また、片方が単位ベクトルとは限らない一般の場合には、次のように考えることができます：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \times (\mathbf{b} \text{ の } \mathbf{a} \text{ 方向の成分}) = \|\mathbf{b}\| \times (\mathbf{a} \text{ の } \mathbf{b} \text{ 方向の成分}).$$

ここで、力学でいう「力の方向成分」とはどういうことか少し説明しますと、例えば、下図のように、坂道にトロッキが置かれたとします。



トロッキにかかっている重力を F 、坂道を降りる方向の単位ベクトルを u とします。すると、

$$(u \text{ 方向の重力 } F \text{ の成分}) = u \cdot F$$

で、これは坂道を降りる方向に重力がもたらす力の大きさを表します。さらにこのままトロッキが坂道を k だけ降りたとすると、位置の変位は ku となりますが、このときの重力の仕事は、変位と重力との内積 $(ku) \cdot F$ 、または同じことですが、重力の u 方向の成分 $u \cdot F$ と距離 k との積に一致します (次節の (iii) を参照)：

$$(\text{重力 } F \text{ の仕事}) = (ku) \cdot F = k(u \cdot F).$$

9.3 内積の計算

a, b, c をベクトル、 k をスカラーとすると、次のことが成立します。

- (i) $a \cdot b = b \cdot a$ (交換法則, または可換法則),
- (ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (分配法則),
- (iii) $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$ ($= ka \cdot b$ と書いて良い) (結合法則).

(i) と (iii) は内積の定義から容易に分かるといいます。(ii) は次のように考えれば良いでしょう：

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= \|c\| \times (a + b \text{ の } c \text{ 方向の成分}) \\ &= \|c\| \times \{(a \text{ の } c \text{ 方向の成分}) + (b \text{ の } c \text{ 方向の成分})\} \\ &= \|c\| \times (a \text{ の } c \text{ 方向の成分}) + \|c\| \times (b \text{ の } c \text{ 方向の成分}) \\ &= a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) をあわせて使うと、 k, l をスカラー、 a, b, c をベクトルとするときに

$$a \cdot (kb + lc) = ka \cdot b + la \cdot c, \quad (ka + lb) \cdot c = ka \cdot c + lb \cdot c$$

が成立することがいえますが、これを内積の (双) 線形性と言います。これを使うと、例えば

$$(3a + 2b) \cdot (c + 2d) = 3a \cdot c + 6a \cdot d + 2b \cdot c + 4b \cdot d$$

のように、1 次式の積と似たような操作が自由にできることが分かります。(もちろん、ベクトルの和とスカラー倍の諸法則のところでは注意したのと同様、両者の違いは意識しておく必要はありますが。)

成分表示による内積の計算。二つのベクトル a, b について、両方の成分表示が分かっているならば、 a, b のなす角が分からなくても、内積 $a \cdot b$ を計算することができます。実際、 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と成分表示されていたとすると、内積の線形性を使って、

$$a \cdot b = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

と計算できます (ベクトル e_1 と e_2 とは直交するので $e_1 \cdot e_2 = 0$ となることや、 $e_1 \cdot e_1 = \|e_1\|^2 = 1$ などに注意)。つまり、 x 成分同士、 y 成分同士をかけあわせて、その和をとれば良いわけです。(代数的にはこれが内積の定義です。) 例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) + 2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-4) + (-6) = -10,$$

等々と計算できます。慣れてくれば暗算でできるようになると思います。

このようにして成分表示だけで内積を計算すると、逆にそれを使って二つのベクトルのなす角がだいたいどれくらいかを知ることができます。最初の「内積の定義」のところでは書いたことを思い出してください。例えば、上の三つの例でいうと、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のなす角は鋭角、 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は直交、 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ のなす角は鈍角であることが分かります。もう少し精密に求めたい場合は、内積の定義を書き換えた

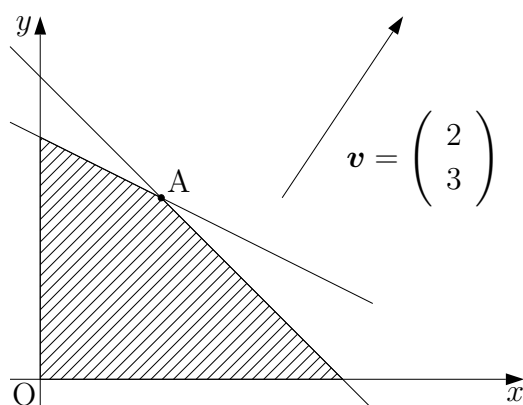
$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$

という式を使って $\cos \theta$ を求めた後、三角比の表と照らしあわせるなどして θ がどれくらいかを求めることができます。

線形計画法と内積。最後に内積の応用として、ちょっとした線形計画法の問題をやってみましょう。

問題. 連立線形不等式 $0 \leq x$, $0 \leq y$, $100x + 100y \leq 500$, $100x + 200y \leq 800$ を満たす (x, y) のうち, $2x + 3y$ が最大になるものを一つ求めよ.

一般に, 連立線形不等式の解全体を座標系に図示すると凸多角形 (3 次元以上の場合には凸多面体) になるのですが, 今の場合, 下図の斜線部のようになります:



この斜線部の点のうち $2x + 3y$ が最大になる点を探したいわけです.

ここで, $2x + 3y$ は

$$2x + 3y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と, 内積の形に書くことができます. ここで, 「方向成分をとりだす」という内積の機能を思い出すと, 斜線部の範囲のうち, 位置ベクトルの $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 方向の成分が最大になるような点を求めれば良いことがわかります. ひらたく言えば, v 方向を上にして図を眺めてみたときに一番上にくる点が正解です. この場合, 図で点 A と書いてあるところが正解 (最適解) になります.

この問題に限らず, 線形計画法で最適解を一つ探したいときには, 凸多面体の内部の点を試す必要はなくて, 端っこの頂点だけを探せば見つかるわけです. 最適解を探すのに「単体法」というテクニックがあるのですが, それはこの考え方を基本とする手法です.

なお, 頂点の座標を具体的に求めるには連立方程式を解く必要があります. 上記の場合は, 連立方程式

$$\begin{cases} 100x + 100y = 500 \\ 100x + 200y = 800 \end{cases}$$

を解けば, 点 A の座標が $(2, 3)$ であることが分かります. 1 学期の講義では行列を使って連立方程式の解法や諸性質 (例えば, いくつかある方程式のうち独立なものはいくつあるのか, 等) を調べることが中心的なテーマです.