10　行列の階数と線形独立性

演習 10.1 次を示せ:

(1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

(2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

演習 10.2 (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ を m 項縦ベクトル, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ を n 項縦ベクトルとすると,

$$A = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

は $m \times n$ 行列である. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\operatorname{rank} A = 1$ となることを示せ.

(2) 逆に, A をある $m \times n$ 行列とするとき, もし $\operatorname{rank} A = 1$ ならば, ある m 項縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と n 項縦ベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在して $A = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$ と書けることを示せ.

※ 時間が余ったら, 次も考えてみてください.

演習 10.3 一般に, A を $m \times n$ 行列, $\operatorname{rank} A = r$ とするとき, ある $m \times r$ 行列 X と $n \times r$ 行列 Y が存在して, $A = X^tY$ と書けることを示せ.