10　行列の階数と線形独立性 の解答例

演習 10.1 $r = \operatorname{rank} A$, $r' = \operatorname{rank} B$ とする. 教科書の定理 2.14 により A には r 個の線形独立な列ベクトルが存在するので, それを一組とり $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とおく. 同様に, B の r' 個の線形独立な列ベクトルをとり $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{r'}$ とする.

(1) まず, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の $r + r'$ 個の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix}$$

が線形独立であることを示す.

$$\begin{aligned}
& c_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + c_{r+1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} + \cdots + c_{r+r'} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\
\Rightarrow \ & \begin{pmatrix} c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r \boldsymbol{x}_r \\ c_{r+1} \boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'} \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ & \begin{cases} c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \\ c_{r+1} \boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'} \boldsymbol{y}_{r'} = \boldsymbol{0} \end{cases} \\
\Rightarrow \ & c_1 = \cdots = c_r = 0, \quad c_{r+1} = \cdots = c_{r+r'} = 0.
\end{aligned}$$

よって上記の $r + r'$ 個の列ベクトルは線形独立で, 従って (再び教科書の定理 2.14 により) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r + r'$ であることが分かる.

後は, $r + r'$ が線形独立な列ベクトルの最大個数であることをいえばよい. そこで以下, 任意の $r + r' + 1$ 個の列ベクトルをとったとき, それが必ず線形従属になってしまうことを示す. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ から $r + r' + 1$ 個の列ベクトルをとった場合, 次の二つのうちどちらか (あるいは両方) が成立しているはずである:

(a) 左側 $\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$ の部分から $r + 1$ 個以上の列ベクトルをとった.

(b) 右側 $\begin{pmatrix} O \\ B \end{pmatrix}$ の部分から $r' + 1$ 個以上の列ベクトルをとった.

A の $r + 1$ 個以上の列ベクトルは必ず線形従属になってしまうので, (a) の場合は左側から取った $r + 1$ 個以上の列ベクトルが線形従属になってしまうはずである. 同様

に, (b) の場合も右側からとった $r'+1$ 個以上の列ベクトルは線形従属になるはず. よって, いずれの場合も, 問題の $r+r'+1$ 個の列ベクトルは線形従属になるはずである. 以上より, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} < r+r'+1$ となることが分かり, 前半と合わせて $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r+r'$ を得る.

(2) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ の $r+r'$ 個の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{r'} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix}$$

が線形独立であることを示せばよい (ここで, $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{r'}$ は $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{r'}$ の上側にある C の列ベクトル).

$$c_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + c_{r+1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} + \cdots + c_{r+r'} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{r'} \\ \boldsymbol{y}_{r'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

のとき, まずこの式の下半分より $c_{r+1}\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{r+r'}\boldsymbol{y}_{r'} = \boldsymbol{0}$ を得るので, $c_{r+1} = \cdots = c_{r+r'} = 0$. このことと式の上半分より $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots c_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ を得るので, $c_1 = \cdots = c_r = 0$. 以上により, 上記の $r+r'$ 個の列ベクトルが線形独立であるから, 教科書の定理 2.14 により, 求める不等式が成立する.

[別証明] $r = \operatorname{rank} A$, $r' = \operatorname{rank} B$ とし,

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P'BQ' = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる正則行列 P, Q, P', Q' をとる.

(1) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ に左右から正則行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & O \\ O & P'BQ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{pmatrix}$$

とできる. これにさらに行の交換と列の交換を何回か施せば,

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_r & & \\ & E_{r'} & \\ & & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r+r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と変形できるので, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の階数は $r + r' = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ である.

(2) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ に左右から正則行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & P' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & PCQ' \\ O & P'BQ' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & PCQ' \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right)$$

とできる. ここで, 右上の部分を分割に合わせて $PCQ' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ と書けば, 上記にさらに行変形, 列変形を施して,

$$\left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{matrix} \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} E_r & O \\ O & O \end{matrix} & \begin{matrix} O & O \\ O & C_4 \end{matrix} \\ O & \begin{matrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{matrix} \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} E_r & & & \\ & E_{r'} & & \\ & & C_4 & \\ & & & O \end{pmatrix}$$

と変形できる. 従って,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = r + r' + \operatorname{rank} C_4 \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

演習 10.2 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ なので, A には少なくとも 1 つは $\boldsymbol{0}$ でない列が存在する. よって, $\operatorname{rank} A \geq 1$. また, A の任意の 2 つの列ベクトル $y_i\boldsymbol{x}$, $y_j\boldsymbol{x}$ をとると, $y_j(y_i\boldsymbol{x}) - y_i(y_j\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから, 2 つは線形従属となる. よって $\operatorname{rank} A < 2$ で, 従って $\operatorname{rank} A = 1$ を得る.

(2) $\operatorname{rank} A = 1$ より, A には $\boldsymbol{0}$ でない列が存在する. そのような列を一つとり $\boldsymbol{x}$ とおく. このとき, A の j 列目 の列ベクトルを $\boldsymbol{x}_j$ とおくと, ($\operatorname{rank} A = 1$ より) 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}$ は必ず線形従属になるはずだから, $a_j\boldsymbol{x}_j + b_j\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる定数 a_j, b_j で $(a_j, b_j) \neq (0, 0)$ となるものが存在する. ここで, もし $a_j = 0$ だとすると $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に反するので $a_j \neq 0$ である. そこで, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -b_1/a_1 \\ \vdots \\ -b_n/a_n \end{pmatrix}$ とおけば, $A = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$ となる.

演習 10.3 $\mathrm{rank}\, A = r$ のとき, A の線形独立な r 個の列ベクトルを一組とり, それを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とおく. A の j 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とおくと $(j = 1, \ldots, n)$, 各 j について, $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は線形従属になるはずだから,

$$\begin{cases} c_{10}\boldsymbol{a}_1 + c_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{1r}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_{n0}\boldsymbol{a}_n + c_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{nr}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

を満たす定数 c_{ji} たちで, $(c_{j0}, \ldots, c_{jr}) \neq (0, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$ を満たすものが存在する. ここで, 各 j について, もし $c_{j0} = 0$ であったとすると $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が線形独立であることに反するので $c_{j0} \neq 0$ である. そこで

$$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r), \quad Y = \begin{pmatrix} -c_{11}/c_{10} & \cdots & -c_{1r}/c_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1}/c_{n0} & \cdots & -c_{nr}/c_{n0} \end{pmatrix}$$

とおけば, $A = X{}^tY$ と書ける.