9 連立 1 次方程式 (その 2)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ があるとき, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならばその方程式は**斉次**, そうでないときは**非斉次**という.

斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ について, n を A の列の数 (= 未知変数の数) とし, $r = \operatorname{rank} A$ とすると, 解の自由度は $n-r$ となる. 言い換えると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はある $n-r$ 個の線形独立な解の組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ をもち, 一般解は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r}$ と書ける ($c_1, \ldots, c_{n-r}$ は任意定数). このような $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**という.

演習 9.1 次の斉次連立 1 次方程式の基本解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

一般の (斉次とは限らない) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について, 右辺を $\boldsymbol{0}$ にした斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解には次のような関係がある: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-r}$ とする. もし $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するなら, そのうちの一つを $\boldsymbol{g}$ とすると, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} + c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{a}_{n-r} \quad (c_1, \ldots, c_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と書ける. (これは下の問題を解いた結果の解釈に役立ててください).

演習 9.2 次の連立 1 次方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

※ 時間が余った人 (たぶんみんな余ると思います) は, 次を考えてください:

演習 9.3 xyz 空間座標に関する方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

で与えられる三つの平面が, (1) ちょうど一点を共有するための条件, (2) ちょうど一本の直線を共有するための条件, (3) 一つも共有点をもたないための条件, をそれぞれ行列を用いて述べよ.